Los conjuntos borrosos y su transversalidad

Enric Trillas[1]

Resumen: Los conjuntos borrosos, son entidades lingüísticas generadas por el significado de los predicados en un universo del discurso. Se separa lo que es un conjunto borroso de etiqueta lingüística dada del estado, o función de pertenencia, en el que se observa. Se muestran algunas oportunidades educativas que el carácter transversal de la teoría de conjuntos borrosos puede facilitar.
Palabras Clave: Palabras con significado medible, conjunto borroso, lógica borrosa.

Abstract: Fuzzy Sets are linguistic entities generated by the meaning of predicates in a universe of discourse. It is distinguished the fuzzy set with some linguistic label from the state, or membership function, in which it is observed. It is shown that due to the Transversal Character of the Theory of Fuzzy Sets, they can offer some educative opportunities.
Keywords: Word with Measurable Meaning, Fuzzy Set, Fuzzy Logic.

Introducción

Cabría describir rápidamente el pensamiento científico diciendo que intenta plantear buenas preguntas (Isaac Rabi) y buscarles respuestas fértiles (Karl Menger); una fertilidad que se considera tanto mejor cuanto más lejos se manifieste del campo en el que surgen la pregunta y la respuesta. Sería una descripción sugerente, pero casi circular; sólo se sabe si la pregunta fue buena cuando la respuesta es fértil y, como enseña la historia de la ciencia, con frecuencia ello no es inmediato. Sin embargo, es una buena descripción de la mejor investigación científica y tecnológica.

Un ejemplo indirecto de fertilidad lo dio la Cibernética, creada realmente en los años treinta-cuarenta del pasado siglo XX alrededor de los entonces llamados Servomecanismos y que Norbert Wiener definió en 1948 como 'el estudio científico del control y la comunicación en animales y máquinas'. Desaparecida a partir de comienzos de los años sesenta, dejó tras ella una serie de nuevas ramas del conocimiento, como son la Inteligencia Artificial y la Robótica y de las cuales las que han perdurado han sido muy fértiles; la llamada Lógica Borrosa entre ellas.

Trabajos usando la Lógica Borrosa (LB) se encuentran en multitud de revistas científicas y tecnológicas correspondientes a campos de investigación distintos e incluso alejados entre sí; sus aplicaciones también pueden encontrarse en ámbitos bien diferentes, incluyendo productos industriales y con grupos que la investigan directamente o la usan en sus planteamientos en casi todos los países del mundo. Hay una enorme cantidad de publicaciones con 'Fuzzy' (Borroso, en inglés) en su título y empleando las metodologías borrosas en su contenido, planteando 'modelos borrosos' de un problema que permiten encontrar soluciones del mismo.

---

[1]. Enric Trillas (Barcelona, 1940), fue catedrático de las universidades politécnicas de Cataluña y de Madrid, investigador del 'European Centre for Soft Computing' y profesor emérito honorífico de la Universidad de Oviedo. En posesión de diversos premios y condecoraciones, tanto nacionales como extranjeras, es Doctor en Ciencias por la Universidad de Barcelona, Doctor Honoris Causa por las universidades Pública de Navarra y Santiago de Compostela, y Profesor Visitante Distinguido de la Universidad Nacional de Córdoba (Argentina). Ya jubilado, es miembro de la Accademia Nazionale delle Scienze, Lettere e Arti de Palermo.

La LB va más allá de la fertilidad, tiene un carácter transversal entre campos distintos que van desde las Matemáticas hasta la Filosofía, pasando por la Gestión de Negocios, el Control Industrial, el llamado 'Clustering', la Medicina o el Tratamiento de Imágenes.

En cuantos problemas hay presencia de imprecisión y especialmente si ésta es de tipo lingüístico, las metodologías de la LB tienen una extraordinaria posibilidad de ser aplicadas, de ofrecer soluciones y con una notable capacidad de ser interpretadas por quienes deban manejarlas. Por otra parte, al tener una base más analógica que digital (lo que no excluye que, tras su digitalización, se implementen en ordenadores) ofrecen un 'tiempo de respuesta' que, por breve que sea, es tecnológicamente importante y especialmente en situaciones críticas.

La hibridación de metodologías y técnicas conocida como *Soft Computing* (tal vez Computación Flexible, en español), mezclando con la LB algoritmos genéticos, redes neuronales artificiales, métodos probabilísticos, etc., ha resultado fundamental para, por ejemplo, poder abordar problemas computacionales que antes ni podían plantearse.

La LB se basa en el concepto básico de conjunto borroso (*Fuzzy Set*, en inglés), introducido por el profesor Lotfi A. Zadeh (Bakú, Azerbaiyán, 1921-Berkeley, California, 2017) en el artículo *Fuzzy Sets*, publicado en la revista *Information and Control*,8: 338-358, 1965. Los conjuntos borrosos permiten abordar problemas en los cuales la incerteza no es de tipo aleatorio, probabilístico, sino relativa a la imprecisión; no deben confundirse los conceptos de incerteza e imprecisión por más que la segunda comporte la primera; el concepto de conjunto borroso no es en sí mismo probabilístico.

En realidad, Zadeh respondió al llamamiento de John von Neumann quien, a mitad de los años cincuenta, había abogado para que en la entonces llamada 'Teoría General de Autómatas' se considerasen enunciados imprecisos, distintos, en sus mismas palabras, a los 'todo o nada' y se hiciese empleando los recursos del flexible Análisis Matemático que tan buenos resultados científicos y tecnológicos había facilitado y en lugar de emplear sólo los recursos de la llamada Matemática Discreta.

1. ¿Qué es un conjunto borroso?

Vale la pena comenzar diciendo que, casi nunca, un conjunto borroso es un conjunto y que los éstos son un caso límite de conjunto borroso. Los conjuntos son entidades propiamente matemáticas, incluso definibles por vía axiomática (Zermelo-Fraenkel, por ejemplo) y obedecen el llamado *axioma de especificación* de Cantor: Si en un conjunto X actúa una propiedad p precisa, binaria, nombrada por una palabra P, existe un único subconjunto **P** de X cuyos elementos son los x de X tales que el enunciado 'x es P' es completamente válido. El mismo X suele suponerse especificado por una propiedad a la que p restringe.

Con ello, el subconjunto $\mathbf{P}^c$, complementario en X del **P**, consta de los y de X tales que el enunciado 'y es P' no es válido en absoluto. Siendo $X = \mathbf{P} \cup \mathbf{P}^c$, con $\mathbf{P} \cap \mathbf{P}^c = \emptyset$, P provoca la partición o clasificación perfecta $\{\mathbf{P}, \mathbf{P}^c\}$ de X; no hay elementos de X que sean dudosos respecto al cumplimiento de p. Todo conjunto está especificado por una propiedad binaria.

1.1. La situación es radicalmente distinta cuando la propiedad p no es precisa, sino imprecisa, es decir no es binaria, sino graduable; como es fácil probar con argumentaciones ‘tipo Sorites’, en esos casos no existe un conjunto especificado por la propiedad p. Sin embargo, en el lenguaje ordinario también se otorga ‘extensión’ a tales propiedades que, por otra parte, son muy frecuentes en el mismo; por ejemplo, se habla con la misma naturalidad de los londinenses ‘jóvenes’, que de aquellos con ‘menos de 35 años’ y cuando los segundos constituyen un conjunto pero no así los primeros.

Conceder extensión a todas las palabras predicativas es algo bien anclado en el lenguaje ordinario, usualmente llamado *natural* por contraposición a los lenguajes formales artificiales y por más que poco tenga de ‘natural’. Es que, por ventura, ¿expresiones usuales como ‘fue un gallina’ o ‘es del tiempo de Maricastaña’, tienen algo de natural como lo tiene respirar? El lenguaje ordinario está influido por la historia y la cultura de sus hablantes; bien distinto de los lenguajes formales artificiales, no es propiamente ‘natural’.

En los lenguajes formales, el significado de la inmensa mayoría de las palabras que se emplean está definido por condiciones que, además de precisas, son necesarias y suficientes; es, por ejemplo y en las mismas matemáticas, el caso de *primo* (‘n es primo’ sí y sólo sí no tiene más divisores exactos que la unidad y él mismo), pero no lo es el de *redondo*: ‘n es redondo’ cuando en su descomposición factorial hay un número relativamente pequeño de números primos elevados a exponentes relativamente grandes (Godfrey H. Hardy), ‘pequeño’ y ‘grande’ hacen impreciso al concepto ‘redondo’.

No hay más que números primos o no-primos, pero los redondos no constituyen una clasificación perfecta, nítida, del conjunto de los números naturales; la propiedad ‘ser primo’ es binaria, rígida, en tanto que ‘ser redondo’ es una propiedad graduable, flexible, todo número es redondo en cierto grado. En términos pictóricos, podría decirse que ‘redondo’ aparece como un *sfumato* del conjunto de los números naturales, en tanto que ‘primo’ simplemente lo colorea en sólo blanco y negro.

1.2. El carácter rígido o flexible de una palabra depende, en cada universo del discurso donde se use, de su significado en el contexto que corresponda y como es el de ‘primo’ en el universo de los números naturales y el contexto matemático, que es bien distinto al de ‘primo’ en un universo de personas y en el contexto de las relaciones familiares. Nótese que dos números n y m son igualmente primos o por lo menos uno de ellos no lo es, pero que esos mismos números son ambos redondos y que lo que será necesario conocer es cuál de ellos es más o menos redondo que el otro. Los números 5 y 23 son igualmente primos, pero de los números $2^7 3^{11} 5^{10}$ y $2^2 3^3 5^5$ parece sensato decir que el segundo es menos redondo que el primero.

Así, una palabra P actuando en un universo X del discurso a través de los enunciados elementales ‘x es P’, determina una relación binaria $<_P$ (un subconjunto del producto cartesiano X x X), percibida empírica o teóricamente y definida por:

$x <_P y$, indicando simbólicamente que ‘x es menos P que y’,

es decir, que x exhibe la propiedad p menos de lo que la exhibe y; que en x se percibe p menos que en y. Con ello:

a) Si $<_P = \emptyset$, se dice que P es una palabra *metafísica* en X. La propiedad p no permite reconocer o percibir que los elementos X sean comparables de menos a más P.

b) En otro caso, se dice que P es una palabra *medible* en X.

La relación ‘igualmente P’, $=_P$, puede definirse como la intersección $<_P \cap <_P^{-1}$, traduciendo 'x es igualmente P que y' sí y sólo sí 'x es menos P que y' e 'y es menos P que x',

de ser $<_P \; = \; =_P$ (es decir, $<_P \subseteq <_P^{-1}$), se dirá que P es precisa o rígida en X; en caso contrario, P es imprecisa o flexible en X.

c) Cuando P es medible en X, el grafo (X, $<_P$) se llama el *significado cualitativo o perceptivamente primario* de P en X. Si P es precisa en X, su significado cualitativo es el grafo (X, $=_P$). Por tanto, una palabra es metafísica, no medible, en X cuando carece en él de significado perceptivamente primario.

d) Si P es medible y precisa en X, entonces los subconjuntos

{x $\in$X; Existe y $\in$X tal que x $=_P$ y} y su complementario {z $\in$X; Para ningún y $\in$X es z $=_P$ y},

constituyen una partición de X y el primero de ellos es el conjunto especificado por P en X. El grafo (X, $=_P$) permite definir a ese subconjunto.

e) Por analogía a lo anterior, si P es medible e imprecisa en X, el grafo (X, $<_P$) *define*, *es*, el conjunto borroso **P**, el de los P, el de etiqueta lingüística P.

Un conjunto borroso es, por tanto, una entidad lingüística relacional; es una forma de decir 'el colectivo nebuloso de los P de X'. Es cómo formalmente se asigna extensión a la expresión lingüística 'los P de X'.

Como un ejemplo trivial, si es P = grande en X = [0, 10], entonces x $<_{grande}$ y $\Leftrightarrow$ x $\leq$ y (en el orden total $\leq$ del intervalo [0, 10]) y, con ello, es x $=_{grande}$ y $\Leftrightarrow$ x = y. El conjunto borroso **G** de los números grandes en [0, 10] no es sino el grafo ([0, 10], $\leq$), el intervalo [0, 10] visto linealmente ordenado. Nótese que de interpretar grande por 'mayor de siete', por ejemplo, el uso de grande pasaría a ser rígido y sería **G** = (7, 10], un conjunto.

Una palabra es rígida o flexible dependiendo de cómo se usa en el universo del discurso; así, atendiendo a la edad cronológica y si Juan tiene 90 años, no cabe afirmar 'Juan es joven', pero de atender a su estado físico y mental ello puede llegarse a afirmar. El significado depende del contexto y del propósito con que se use la palabra; es un concepto situacional (Jon Bairwise).

1.3. A fin de 'medir' la extensión del significado cualitativo, debe definirse el concepto matemático de medida en los grafos (X, $<_P$). Una tal medida es una función m: X $\rightarrow$[0, 1], tal que:

1) x $<_P$ y => m (x) $\leq$ m (y);

2) Si z es 'minimal' para $<_P$, es decir, no existe ningún y distinto de z tal que y $<_P$ z, es m (z) = 0;

3) Si z es 'maximal' para $<_P$, es decir, no existe ningún y distinto de z tal que z $<_P$ y, es m (z) = 1.

La propiedad esencial de una medida es la (1); nótese cuán raro sería que si 'La altura de Paula es 1.65m' y 'La altura de Carmen es 1.77', la medida del significado de la primera fuese, por ejemplo, 0.8 y la de la segunda fuese 0.6. Por lo que respecta a las propiedades (2) y (3), dependen de la existencia de elementos minimales o maximales; de no haberlos, decaen. De haber un único minimal es el mínimo y de haber un único maximal es el máximo; es el caso del sencillo grafo anterior ([0, 10], $\leq$), en el cual 0 es el mínimo y 10 el máximo.

Es importante notar que las tres propiedades de una medida no permiten especificar una por completo, se necesita más información; una información que provendrá del contexto del problema o será una hipótesis razonable. Por ejemplo, una medida del significado cualitativo de 'grande' en [0, 10] será una función m_{grande}: [0, 10] $\rightarrow$[0, 1] tal que

$$m_{grande}(0) = 0;\ m_{grande}(10) = 1;\ y\ [x \leq y \Rightarrow m_{grande}(x) \leq m_{grande}(y)],$$

es decir, las medidas de 'grande' son las muchísimas funciones que crecen desde (0, 0) hasta (10, 1) y determinar una de ellas requiere saber más. Por ejemplo, de conocerse que la medida es lineal, $m_{grande}(x) = ax + b$, las condiciones de contorno implican $a = 1/10$ y $b = 0$, con lo que la única medida lineal es la función creciente $m_{grande}(x) = x/10$.

Sin embargo, de conocerse que la medida es cuadrática, $m_{grande}(x) = ax^2 + bx + c$, sólo se sabrá que es $c = 0$ y $1 = 100a + 10b \Leftrightarrow b = 1/10 - 10a$; habrá tantas medidas cuadrática como valores pueda tomar el parámetro a. Por ejemplo, de saber que es $m_{grande}(5) = 0.6$, se contaría con la nueva ecuación $0.6 = 25a + 5b = 25a + ½ - 50a = ½ - 25a$, con lo cual sería $a = - 0.1/25 = - 1/250$ y, por tanto, $b = 1/10 + 1/25 = 35/250 = 0.14$. Con todo ello y finalmente, la medida cuadrática especificada por esas condiciones sería $m_{grande}(x) = - x^2/250 + 0.14x$.

Otra posible medida, de tipo distinto, podría resultar de saberse que es lineal hasta x = 7, constante e igual a 0.7 hasta x = 9 y, finalmente otra vez lineal hasta x = 10. Tal medida sería la función lineal a trozos:

$$m_{grande}(x) = x/10,\ si\ x \in[0, 7];\ 0.7,\ si\ x \in[7, 9];\ y\ 0.3x - 2,\ si\ x \in[9, 10].$$

Especificar una medida del significado exige conocer o suponer condiciones contextuales suficientes para ello; de no poder conocerlas, lo más sensato es considerar la medida más simple, la lineal en el caso de grande. Especificar una medida comporta *diseñarla* de acuerdo con las restricciones impuestas por la información adicional disponible.

Tal diseño debe hacerse cuidadosamente ya que un error puede conducir a medidas incorrectas; así de ser la medida adecuada de grande la anterior medida lineal a trozos, la medida del significado de '9 es grande' sería 0.7, pero de tomarse erróneamente la medida lineal sería 0.5. Una diferencia en 0.2 que podría ser importante según fuese la sensibilidad numérica requerida por el correspondiente problema.

Así, el grafo $(X, <_P)$ actúa como 'magnitud básica de diseño' y permite obtener magnitudes escalares $(X, <_P, m_P)$, dadas por las medidas m_P del significado cualitativo de P en X; cada una de esas magnitudes es *un significado cuantitativo* de P en X. No hay un único significado cuantitativo; cada uno depende de la información contextual de la que el diseñador pueda disponer acerca del uso de P en X, de cuanto pueda observar o sea razonable suponer acerca de m_P.

1.4. De hecho y aunque en general y por lo que respecta a las palabras del lenguaje ordinario, la relación $<_P \subseteq X \times X$ sea percibida empíricamente, una vez establecida como el significado cualitativo de P en X, debe considerarse fija o por lo menos fijada. Sin embargo, las medidas tienen un carácter diferente, son variables, dependen de la información adicional que le sea alcanzable al diseñador; la medida es contextualmente observacional y representa el *estado* en que se presenta u observa el grafo, el conjunto borroso.

Si la entidad nebulosa conjunto borroso no es fácil de imaginar más allá de imaginar X como un 'sfumato', la medida es una función que, siempre que P presente una característica numérica, como es el caso de 'alto' caracterizada por la altura en centímetros o metros, aparece finalmente como una función numérica R $\rightarrow$[0, 1], que toma el lugar de la función X $\rightarrow$[0, 1] original. En general y en las aplicaciones, las palabras que juegan el papel esencial en la descripción lingüística del fenómeno en consideración, muestran características numéricas.

Con alguna frecuencia y en aplicaciones con un universo X grande representado por un intervalo de la recta real, conocer por completo la relación cualitativa $<_P$ no es fácil; como sea que el diseñador debe contentarse con el comportamiento de la característica numérica de P, suele diseñar la medida como le es posible y cuando consigue una, sea m_P, está conducido a considerar la relación $<_{mP}$ definida por:

$$x <_{mP} y \Leftrightarrow m_P(x) \leq m_P(y),$$

el significado de P en x mide menos que el de P en y, que, contrariamente a la relación original $<_P$ es lineal, total, ya que de ambos x, y uno de ellos tendrá medida menor o igual que el otro, en tanto que respecto de $<_P$ pueden fácilmente existir elementos no comparables, es decir, que no sea perceptivamente posible afirmar si uno de ellos es 'menos P', muestra la propiedad p menos que el otro.

En todo caso es:

$$x <_P y \Rightarrow m_P(x) \leq m_P(y) \Leftrightarrow x <_{mP} y,$$

que muestra la contención $<_P \subseteq <_{mP}$: De considerar a la nueva relación $<_{mP}$ como el significado cualitativo de P en X, éste aumenta. La medida altera la visión que pueda tenerse del significado primario, tras medir facilita un 'significado secundario', el $<_{mP}$, que es más amplio que el original; la medida altera el significado primario. He aquí otra razón por la cual y aún desconociendo $<_P$ el diseñador debe especificar la medida con el máximo cuidado posible. En conclusión:

Un conjunto borroso **P** = (X, $<_P$) se observa a través del estado en que es percibido y dado por la magnitud escalar diseñada (X, $<_P$, m_P) y con ella debe manejarse. En la terminología usual, la medida m_P se llama la *función de pertenencia al conjunto borroso de etiqueta lingüística* P.

Si la relación entre elementos y conjuntos está completamente definida por los símbolos binarios contrarios $\in$ y $\notin$, en el caso de un conjunto borroso la pertenencia es graduada: $m_P(x) = r$ indica que $x \in_r$ **P**, que x pertenece a P con grado r en [0, 1], siendo $\in\ = \in_1$ y $\notin\ = \in_0$. De ahí el nombre función de pertenencia dado a la medida del significado. Dependiendo de la medida diseñada, todo elemento del universo X *pertenece en algún grado* al conjunto borroso, desaparece la dicotomía pertenece/no pertenece; la pertenencia se difumina en función de la medida.

Con frecuencia, la flexibilidad del comportamiento de las palabras imprecisas se manifiesta a través de la continuidad de la función de pertenencia, la cual hace que la pertenencia observacional traducida por el símbolo '$\in_r$' sea entonces el continuo típico del 'sfumato'. Obviamente, si X es finito, entonces las funciones de pertenencia se reducen a una lista igualmente finita de números del intervalo unidad.

Si en el caso de los conjuntos, cuya función de pertenencia es única y por ello también recibe el nombre de 'función característica', los símbolos $\in_1$ y $\in_0$ son 'absolutos', no debe olvidarse que con los conjuntos borrosos los símbolos $\in_r$, con r en [0, 1] son relativos a la medida diseñada; al 'sfumato' que se haya pintado realmente. Cada diseño de un conjunto borroso es como transformar X en un 'sfumato'.

1. 5. Para acabar esta presentación del concepto de conjunto borroso, convienen unas palabras acerca del cálculo con los mismos; en realidad, del cálculo con los

significados de enunciados lingüísticos compuestos de otros enunciados de tipo elemental y como puede ser, por ejemplo, si con el enunciado:

‘Si x es P, entonces y es Q’, y ‘x es P*’, con lo cual será ‘y es Q*’,

se trata de encontrar Q* una vez conocidos P, Q y P*. Supuesto que las respectivas funciones de pertenencia sean m_P para **P**, m_Q para **Q,** m_{P*} para **P*** y alguna función desconocida m_{Q*} para **Q***, faltarán las correspondientes a la relación borrosa ‘Si/entonces’, a la conjunción copulativa ‘y’, así como interpretar ‘con lo cual’.

En el cálculo clásico de proposiciones, la anterior frase se representaría por la fórmula booleana $(p \rightarrow q)\cdot p^* \leq q^*$, donde $\rightarrow$ indica ‘implica’, $\cdot$ indica la conjunción y el orden $\leq$ del álgebra de Boole traduce ‘con lo cual’. Esa fórmula, con la usual interpretación de ‘Si p, entonces q’ como ‘no p o q’ (simbólicamente, $p' + q$) se explicita en la forma $(p' + q) \cdot p^* \leq q^*$, mostrando que la expresión $(p' + q) \cdot p^*$ con los datos conocidos, es la cota inferior del término desconocido q* y que cualquier q* superior a esa cota en el orden parcial del álgebra, $\leq$, resuelve el problema.

Sin embargo, en el caso de palabras imprecisas, nada es ‘universal’, todo debe diseñarse de forma adecuada. Así, hay que diseñar funciones J y T, tales que la expresión lingüística pueda representarse por una fórmula del tipo

$$T (J (m_P (x), m_Q (y)), m_{P*} (x)) \leq m_{Q*}(y), \text{ para cualesquiera x e y}$$

respectivamente pertenecientes a los universos X e Y en los que actúan respectivamente P, P*, Q y la desconocida Q*. Calcular el primer miembro de esa fórmula es esencial ya que será el menor valor posible de m_{Q*}; por tanto y de forma cautelosa podrá partirse de ese miembro para hallar una solución.

Ahora bien, en el lenguaje las expresiones lingüísticas condicionales ‘Si p, entonces q’, no se interpretan siempre como ‘no p o q’, sino que entre otras formas y con frecuencia se entienden como ‘no p o p y q’ y también de la forma conjuntiva ‘p y q’; cada interpretación del condicional como un enunciado lleva a una función J distinta. Por su parte, la conjunción ‘y’, siempre conmutativa en el cálculo clásico, no lo es en el lenguaje ordinario (por ejemplo, no significa lo mismo ‘se cayó y lloró’ que ‘lloró y se cayó’) ya que en él suele jugar el factor temporal. El diseñador debe tener todo eso en cuenta para diseñar J y $T_\&$. Un ejemplo final ayudará a comprender el problema.

Considérese el condicional ‘Si x es grande, entonces y es pequeño’, el dato ‘x = 6’, y con ello búsquese la *salida* ‘y es Q*’ del sistema. Supondremos para simplificar que es $X = Y = [0, 1]$, $m_{grande} (x) = x$, $m_{pequeño} (y) = 1 – y$, así como que el condicional es conjuntivo pero no conmutativo. Así, el problema se reduce a diseñar funciones T y T* no conmutativa, tales que $T (T^*(x, 1- y), m_{\{6\}} (x)) \leq m_{Q*} (y)$, con lo cual se dispondrá de la mayor cota inferior posible para m_{Q*} la función

$$\mathrm{Sup}_{x \in [0, 1]} T (T^* (x, 1 –y), m_{\{6\}} (x)),$$

no dependiente más que de y. Sin embargo, como sea que $m_{\{6\}} (x) = 1 \Leftrightarrow x = 6$, siendo 0 en otro caso, la anterior fórmula se simplifica hasta

$\mathrm{Sup}_{x \in [0, 1]} T (T^*(1, 1 –y), 1) = 1 – y \leq m_{Q*} (y)$: Sin tener que buscar las funciones T y T* puede tomarse $m_{Q*} (y) = 1 – y$, con lo cual es Q* = pequeño.

Es un tipo de problema que, frecuente en las aplicaciones, en ellas se requiere un resultado numérico y no funcional como es la anterior función 1 – y. Se requiere lo que se llama *desborrosificar* la salida, compactar en un valor de y la información dada en el ejemplo por la función 1 – y. Una de las maneras usuales de hacerlo es tomar el valor y* que divide el área bajo la curva definida por m_{Q*} en dos partes de igual área, el llamado ‘centro de área’, como punto de equilibrio. Como en el ejemplo el área bajo la curva 1 – y es obviamente ½, debe encontrarse el punto y* de [0, 1] tal que sea

$$1/4 = \int_0^{y^*}(1 - y)dy = y^* - y^{*2}/2,$$

ecuación de segundo grado cuya solución no mayor que uno es $y^* = 1 - \sqrt{(1/2)} \sim 0.7$.

2. NOTICIA BREVE: LA RELACIÓN CON LA VAGUEDAD

Los conjuntos borrosos abren la puerta al análisis de una restricción del concepto filosófico de *vaguedad*, concretamente la que es medible y que recibe el nombre de *borrosidad.* Es decir, la vaguedad referente a enunciados medibles y de los cuales se conozca, se haya diseñado, una medida. En general, es difícil percibir si de dos enunciados lingüísticos vagos uno de ellos lo es menos que el otro, es decir, conocer la relación $<_{vago}$, 'menos vago que', sin embargo, con enunciados medibles ello es sistemáticamente posible como, en su artículo, *A Definition of a Nonprobabilistic Entropy in the Setting of Fuzzy Sets Theory*, publicado en *Information and Control*,20: 301-312, 1972, mostraron Aldo de Luca (1941- 2018) y Settimo Termini.

2.1. La argumentación básica de esos autores se centra en las siguientes y razonables hipótesis:

1) Los enunciados menos borrosos son los rígidos; 2) Los más borrosos son aquellos para los cuales su medida es ½; 3) El menos borroso de dos enunciados es aquel cuya medida se acerque más a los valores 0 y 1 de las medidas rígidas.

Tales hipótesis las formalizaron a través de una magnitud escalar dada por la relación $<_{borr}$ (menos borroso que) y una medida m_{borr}, como sigue:

1) $m_P <_{borr} m_Q \Leftrightarrow 0 \leq m_P\ (x) \leq m_Q\ (y) \leq ½$, y $½ \leq m_Q\ (y) \leq m_P(x) \leq 1$.

2) Si para todo x de X es $m_P\ (x) \in \{0, 1\}$, $m_{borr}\ (m_P) = 0$.

3) Si $m_Q\ (x) = ½$, para todo x de X, $m_{borr}\ (m_Q) = 1$.

4) $m_P <_{borr} m_Q \Rightarrow m_{borr}\ (m_P) \leq m_{borr}\ (m_Q)$.

Tres observaciones son convenientes antes de seguir. En primer lugar, la relación $<_{borr}$ está definida realmente en el intervalo [0, 1], al que le cambia el orden lineal usual por el llamado *sharpened* o afilado en español, obtenido rompiendo el intervalo por el punto ½ y tomando el orden creciente antes de él y el decreciente después. Es un orden parcial; por ejemplo, bajo el mismo los números 0.4 y 0.7 no son comparables.

En segundo lugar, la idea de la relación $<_{borr}$ proviene de la del conjunto clásico más próximo a uno borroso. Dado un conjunto borroso, conocido por una función de pertenencia m_P, el conjunto clásico más próximo se define como aquel cuya única medida es

$$m\ (x) = 0, \text{ si } m_P\ (x) < ½, \text{ y } m\ (x) = 1, \text{ si } ½ < m_P\ (x).$$

Debe observarse que el conjunto clásico más próximo a un conjunto borroso lo es a un estado observacional del mismo más que al mismo conjunto borroso; dos conjuntos borrosos distintos pueden tener el mismo conjunto más próximo.

En tercer lugar, fijar como umbral de máxima borrosidad al número ½, tiene completo sentido de representar la negación P' de P, por la función N (x) = 1 – x; es decir, definiendo $m_{P'} = N \circ m_P = 1 - m_P$, ya que esa función tiene el punto fijo n = 1 –

n ⇔ n = ½. Con ello, se toma como umbral de borrosidad al valor en el que coinciden las medidas de $m_{P'}$ y m_P.

Sin embargo, no siempre la medida de P' puede calcularse a partir de la de P por la función 1 – x que revela una negación fuerte (p')' = p [N (N (x)) = x], cuando en el lenguaje la negación puede ser débil (p < (p')'), intuicionista ((p')' < p), salvaje (cuando no es ni débil ni intuicionista) y fuerte cuando es a la vez débil e intuicionista. Por ejemplo, de considerar la también negación fuerte representada por la función N (x) = $\sqrt{(1 - x^2)}$, el punto fijo es n = $\sqrt{2}/2$ y entonces habría que cambiar cuanto a ½ se refiere la definición por $\sqrt{2}/2$; de considerar la negación salvaje representada por N (x) = $1 - x^2$, el punto fijo sería $(\sqrt{5} - 1)/2$.

2.2. La medida m_{borr} que llevó a de Luca y Termini a hablar de 'entropía no probabilística' y, por cuanto en principio, el concepto de borrosidad no es, en sí mismo, de tipo aleatorio, fue dada por la función (de Claude Shannon),

$$S(x) = x\ln(x) - (1 - x)\ln(1 - x),$$

que facilita en universos finitos la función $\Theta(m_P) = \Sigma_{i=1}^{n} S(x_i)$ que, verificando las propiedades de una medida de la borrosidad, es análoga a la entropía de tipo probabilístico de Shannon.

Hay muchas otras funciones que verifican aquellas propiedades y, entre ellas y también para universos X finitos con elementos $x_1, x_2, \ldots, x_n$, pueden citarse las de la forma

$$\Theta_{i=1}^{n} (a_i \bullet \Delta(x_i)),$$

con adecuados parámetros a_i, operaciones Θ y •, y una función continua $\Delta: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ tal que $\Delta(0) = \Delta(1) = 0$, con máximo valor $\Delta(1/2)$. Por ejemplo, las de los tipos: $\Sigma_{i=1}^{n} a_i\Delta(x_i)$ y $\mathrm{Max}_{i=1}^{n} \min(a_i, \Delta(x_i))$.

Una de las aplicaciones de las medidas de borrosidad consiste en usarlas para representar el estado de un conjunto borroso por medio de la función de pertenencia menos borrosa posible, es decir, con la menor medida de borrosidad. Es un intento de no ser demasiado impreciso en la representación del estado en que se presenta un conjunto borroso, de elegir el estado menos borroso posible sin llegar al extremo de substituirlo por un conjunto clásico. Con todo ello, cabe decir que los conjuntos borrosos sirven para el estudio de la borrosidad.

3. La transversalidad educativa de lo borroso

La gran cantidad de campos en los que aparecen y se aplican los conjuntos borrosos citados en la Introducción, permiten pensar que la teoría de esos conjuntos pueda tener interés didáctico en, por lo menos, las enseñanzas media superior y formación profesional.

Cuanto se ha relatado en la sintética presentación anterior lleva a pensar que entre la teoría de conjuntos borrosos y esas enseñanzas, hay una evidente e inmediata confluencia intelectual con al menos los profesores de matemáticas, física, dibujo técnico, tecnología, lengua y filosofía. Una confluencia permitiendo que el carácter transversal que muestra la teoría de conjuntos borrosos pueda servir para organizar la enseñanza en forma distinta a la habitual por disciplinas, pasando a hacerlo por 'proyectos docentes y transversales', de tipo multidisciplinar y en los que participen profesores de diversas materias e incluso alumnos de edades diversas; unos proyectos en los que se fomente la creatividad de los alumnos y de los que las experiencias conocidas hacen ver que los alumnos disfrutan aprendiendo en y con ellos.

Junto a su carácter científicamente transversal, los conjuntos borrosos pueden alcanzar otro de carácter transversal educativo; una transversalidad doble que puede permitir que el conocimiento 'toque dentro' a los alumnos, algo sin lo cual la enseñanza puede instruir, pero no educar.

La enseñanza compartimentada en materias sin conexión aparente entre ellas es escasamente educativa, es simplemente instructiva y la misión de la enseñanza debe ser, mayormente, educativa; debe abrir ventanas a los alumnos desde las que puedan ver la maravillosa complejidad del conjunto de las cosas y no hacerles creer que 'el mundo' está perfectamente clasificado en compartimentos estancos. Todo se interconecta con todo, es más una clasificación imprecisa, flexible, que una rígida, precisa; más un 'sfumato' de Leonardo da Vinci que un cuadro geométrico de Kandinsky con colores perfectamente repartidos.

Naturalmente, el uso de la transversalidad de los conjuntos borrosos para avanzar en la de la enseñanza, requiere que los profesores conozcan lo esencial de su teoría y sean capaces de elaborar unos proyectos que sean, por ejemplo, trimestrales y en los que los diversos aspectos tocantes a sus materias aparezcan de forma más integral que sucesiva; a este respecto y pensando en los profesores de 'letras', debe decirse que si para comprender la teoría elemental de los conjuntos borrosos, es necesario un cierto conocimiento matemático y científico no se requieren, sin embargo, conocimientos especializados.

Por citar algunos temas que podrían ser de interés y, por ejemplo, está el correspondiente a la vaguedad medible o borrosidad, así como el de la 'verdad' también contemplando el predicado 'verdadero' como medible, es decir, viendo a la verdad como un concepto no metafísico sino medible, unos aspectos en los que los profesores de filosofía deberían estar interesados; medir es esencial para la ciencia y conviene recordar el, abreviado, *Si no lo puedes medir, no es ciencia*, de Lord Kelvin. Otro tema de interés es la construcción de un 'controlador borroso' elemental con el cual controlar efectivamente alguna máquina cuyo comportamiento pueda describirse mediante un sistema de reglas lingüísticas; es un aspecto en el cual pueden colaborar profesores de matemáticas, física y tecnología.

Hay muchos otros temas posibles y como son los de la gestión de recursos económicos o el tratamiento de imágenes; sin embargo, la determinación de cada proyecto concreto para la enseñanza es cosa de sus profesores quienes, con toda seguridad, podrían contar con la ayuda de los investigadores universitarios que trabajan en el campo borroso y que forman una comunidad abierta y amigable, siempre dispuesta a ayudar a quienes desean aprender lógica borrosa.

Una experiencia de interés es la que a lo largo de diez años se realizó en Shanghái por grupos de profesores y que dio lugar al libro *Fuzzy Sets Theory Preliminary. Can a Washing Machine Think?* (Springer, 2018), recientemente traducido al inglés y en cuyo título la pregunta '¿Puede pensar una lavadora?, da idea de su finalidad educativa. Desde el punto de vista pedagógico, los conjuntos borrosos ofrecen una interesante oportunidad educativa.

Conclusión

Cuanto antecede no es sino una breve presentación de un tema muy amplio y para cuyo estudio existe una abundantísima bibliografía, de la cual y en el apartado final de referencias se citarán algunas obras.

Casi nada de lo que se ha presentado requiere, realmente, conocimientos matemáticos ‘superiores’, aunque si una cierta familiaridad con algunos términos elementales como ‘conjunto’ finito e infinito, ‘función’, ‘orden total’, ‘orden parcial’, ‘operación’ y ’magnitud escalar’, así como el manejo de fórmulas y ecuaciones sencillas.

Es un conocimiento que, de hecho, deberían tener *todos* los estudiantes a su entrada en la universidad y por más que, con demasiada frecuencia no sea el caso, como pone de manifiesto la horrible y demasiado oída expresión ‘¡Es que soy de letras!’, cuando tan raramente se oye la homóloga ‘¡Es que soy de ciencias!’. Posiblemente es una consecuencia de una enseñanza compartimentada en disciplinas ‘estancas’, presentadas de forma inconexa y sin que los enseñantes de las mismas mantengan colaboración didáctica alguna entre ellos; lo que no puede sorprender que se contagie a los alumnos.

En bien de la cultura es urgente terminar con la insensata clasificación entre ‘letras’ y ‘ciencias’ que, si siempre ha sido absurda, lo es más aún en un tiempo en el cual el gran riesgo es que las tecnologías de la información y la comunicación puedan devorar al pensamiento libre, substituyéndolo por un pretendido razonamiento deductivo. Unas tecnologías cuyo éxito es debido a algoritmos, a un tipo de razonamiento deductivo fuerte que no coincide con el más débil y flexible del razonamiento ordinario o de sentido común de las personas; las máquinas deducen francamente bien, pero no piensan, ni propiamente especulan.

El autor cree necesario ampliar el concepto ‘Humanidades’ con el pensamiento exacto que pedía Karl Menger, es decir con aquel soportado en modelos matemáticos; no en balde y en las palabras del Premio Nobel de Física Eugene Wigner, la sorpresiva eficacia de las matemáticas en las ciencias naturales parece rozar lo irrazonable. Todo ello proviene de pensamientos tan humanos como son los correspondientes a la Historia, la Literatura, la Lingüística, etc. Al fin y según Galileo Galilei, el libro del mundo está escrito en lenguaje matemático.

Pensar es mucho más que deducir fuerte o débilmente; pensar significa mucho más y, por ejemplo, comporta especular, un tipo límite de razonamiento en la frontera con el pensamiento dirigido que, algunas veces, se alcanza alternando la deducción y la abducción, es decir, induciendo. Es el tipo de razonamiento que conduce a la creatividad, el que lleva al *Eureka*! de Arquímedes y que, con gran frecuencia, tiene a ver con la sensibilidad, dedicación y pasión del pensador por un tema; un pensamiento lento, francamente opuesto a la rapidez a la que someten muchas de las nuevas tecnologías.

Debe evitarse la desaparición del pensamiento crítico y una misión de la enseñanza es fomentarlo para que los ciudadanos puedan ser no sólo creativos sino verdaderamente libres.

Las aplicaciones de la teoría de conjuntos borrosos se centran mayormente en cuanto, describible lingüísticamente, se alcanza por medio del razonamiento llamado de sentido común, el de ‘cada día’ con el cual las personas toman la mayor parte de las decisiones que les son cruciales.

Precisamente, el futuro científico de esa teoría está evolucionando actualmente hacia lo que Lotfi A. Zadeh llamó la ‘Computación con palabras y percepciones’ (*Computing with Words and Perceptions*, en inglés) que puede verse como un paso más en el largo y seguramente inacabable camino que, empezado por Ramon Llull con su *Ars Magna*, influyó a Leibniz llevándole a su famosa exclamación ‘No discutamos, ¡Calculemos!’, a ver el razonamiento como un cálculo y que George Boole avanzó en términos algebraicos aunque precisos y sólo con cabida para razonar adicionalmente en términos de probabilidades de sucesos rígidos.

Un cálculo, el buscado por Leibniz, que difícilmente podrá ser sino una familia de cálculos especializados para cada parte del lenguaje ordinario, el cual y siempre sobrepasará todo intento de formalización de tipo preciso. La gran ayuda que el pensamiento brinda al razonamiento es la analogía que, si no puede llevar más que a refutar y conjeturar, es decir, a refutaciones, consecuencias, hipótesis y especulaciones, permite llegar a 'ver más allá' y gracias a lo almacenado en la memoria.

Algunas referencias

[1] B. Bede, 2013, Mathematics of Fuzzy Sets and Fuzzy Logic. Springer, Londres.

[2] B. Bouchon-Meunier, 2003, La logique floue. PUF, Paris.

[3] B. Demant, 1993, Fuzzy-Theorie oder Die Faszination des Vagen. Vieweg, Wiesbaden.

[4] M. Friedman, 1997, Fuzzy Logic. Dispatches from the Information Revolution. Véhicule Press, Montreal.

[5] G. Klir, B. Yuan, 1995, Fuzzy Sets and Fuzzy Logic. Prentice Hall, New Jersey.

[6] H.T. Nguyen, E.A. Walker, 2005, A First Course in Fuzzy Logic. CRC Press, Boca Raton.

[7] A. Sangalli, 1998, The Importance of Being Fuzzy and other Insights from the border between Math and Computers. Princeton University Press, Princeton.

[8] E. Trillas, C. Alsina, J-M. Terricabras, 1995, Introducción a la Lógica Borrosa. Ed. Ariel, Barcelona.

[9] E. Trillas, 1998, La Inteligencia Artificial. Máquinas y personas. Ed. Debate, Madrid.

[10] E. Trillas, L. Eciolaza, 2015, Fuzzy Logic. An Introductory Course for Engineering Students. Springer. Springer, Suiza.

[11] E. Trillas, 2015, En defensa del raonament. PUV, València.

[12] E. Trillas, 2017, On the Logos: A Naïve View on Ordinary Reasoning and Fuzzy Logic. Springer, Suiza.

[13]E. Trillas, 2018, El desafío de la creatividad. Ed. Universidade de Santiago de Compostela.

[14] R.R. Yager, S. Ovchinnikov, R.M. Tong, H.T. Nguyen (Eds.), 1987, Fuzzy Sets and Applications: Selected Papers by L. A. Zadeh. John Wiley & Sons, Nueva York.

[15] L. A. Zadeh, 2012, Computing with Words. Principal Concepts and Ideas. Springer, Berlin.

Recebido para publicação em 11-07-19; aceito em 24-07-19