Jogo de Bingo, Probabilidades e Senso Comum

João Sérgio Lauand[1]

Resumo: A Teoria das Probabilidades tem resultados surpreendentes que muitas vezes se chocam com nossa percepção. Este artigo analisa alguns desses casos: o famoso "Problema das três portas" e outros com cálculos do Jogo de Bingo e de aniversários. Dessa forma ajuda também a entender um pouco mais os conceitos dessa ciência e a ver, em alguns casos, a beleza da Matemática.
Palavras Chave: Teoria das Probabilidades, Senso Comum, "Problema das três portas", Jogos.

Abstract: Probability Theory often offers surprising results which defy our intuition. This article analyzes some of these cases: the famous "Monty Hall problem", and some unexpected calculations from Bingo Game and from birthdays. In this way, it also helps to understand better the concepts of that Science and to see, in some cases, the beauty of Mathematics.
Keywords: Probability theory; "Monty Hall problem"; bingo. games.

Um dos jogos mais populares que há é o de Bingo, que como se sabe, consiste em preencher uma cartela com números. Todos os jogos dependem de sorte e estratégia, como os de baralho, ou estratégia, como o de xadrez, ou puramente de sorte, como é o caso do Bingo. Não há nada que o jogador possa fazer para melhorar seu jogo, além de torcer e prestar atenção. Uma coisa que ele pode fazer é tentar entender as probabilidades ligadas ao jogo. É o que vamos fazer a seguir.

A Teoria das Probabilidades estuda, como seu nome diz, as possibilidades ligadas a eventos determinados. Ao lançar um dado, por exemplo, a probabilidade de sair um número previamente escolhido é de 1/6. São 6 números, igualmente prováveis, então se eu escolher, por ex., o número 2, a chance de que ele saia é de 1/6, ou dizendo de outra forma, se eu lançar o dado 6 vezes, terei a probabilidade de que meu número saia uma vez. Nada impede que ele saia todas as 6 vezes ou nenhuma, mas não é o mais provável.

A probabilidade é, portanto, o grau de possibilidade, de chance matemática, o quanto é provável. Uma forma de medi-la é dividir o número de resultados esperados, pelo número de possíveis. No caso do dado, de que falamos acima, temos um resultado esperado, em seis possíveis, daí a probabilidade de um para seis ou 0,16. Se eu lançar uma moeda, a probabilidade de sair coroa é de 1/2, ou 0,5 ou 50%.

Sendo um jogo, e com números, há muitas probabilidades e resultados que podemos associar ao Bingo. Vamos tratar disso adiante, mas antes queria mostrar que nosso senso de probabilidades, nosso senso comum, nesse aspecto, nem sempre é muito certeiro.

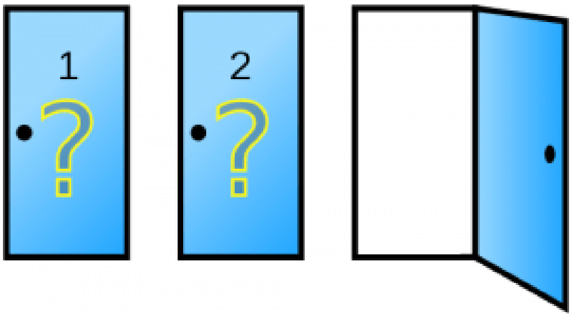
---

[1]. Doutor em Educação pela Feusp.

O problema das 3 portas

Este famoso problema (entre outros) recebeu notável divulgação entre nós por meio de um livro escrito em 1988 que analisa com muita propriedade a relação entre nossas impressões e as probabilidades ligadas a vários fenômenos corriqueiros. Chama-se “O Andar do Bêbado” e seu autor é Leonard Mlodinow.

Entre tantas questões interessantes que ele estuda, está o problema das 3 portas. Em um concurso, uma pessoa deve escolher uma de 3 portas, A, B ou C, sabendo que em uma há um belo presente para ela, e as outras duas não têm nada. Ela escolhe a porta A. Antes de lhe dizer se acertou, o organizador abre a porta C e lhe diz que essa não tem nada. E lhe pergunta se quer trocar o palpite da porta A para a porta B. O que você faria?



https://statisticsbyjim.com/fun/monty-hall-problem/

Se quer pensar um pouco no problema não leia este parágrafo e os próximos, pois já vou apresentar a solução da questão. Boa parte das pessoas pensa, a recompensa não saiu do lugar, as portas A e B não foram alteradas, então não há motivo para alterar minha escolha. Costumo ser uma pessoa de convicções e não vou alterar meu palpite.

Engano! Qualquer alteração no problema muda as probabilidades. No início cada porta tinha 1/3 de chance de ser a premiada. Com a abertura da porta C, as probabilidades se alteraram e agora são para A 1/3, para B 2/3 e para C zero.

Então temos mais duas características da Teoria de Probabilidades: qualquer mudança de condições pode alterar as probabilidades e a soma das probabilidades para um evento é igual a um. No caso da moeda temos ou cara ou coroa, com 0,5 cada um, somando um e no do dado temos 6 números, com 1/6 cada, somando um.

Voltando à porta, quando nosso amigo escolhe a porta A ele tem 1/3 de chance de ganhar e 2/3 de chance de perder, se o prêmio estiver em B ou C. Ao abrir a porta C, o conjunto de B e C continua com a chance de 2/3 de conter o prêmio, que não foi alterado de lugar. Logo a probabilidade de ele estar em B é de 2/3. Portanto, quando se oferece a chance de trocar a porta A pela B se está oferecendo sair de 1/3 para 2/3 de probabilidade, ou o dobro de chances!

Contrário ao senso comum, à nossa percepção? Pode ser. O autor do livro diz que há bons matemáticos que têm dificuldade de aceitar essa solução. Minha experiência também vai nessa direção.

Talvez uma forma de entender que essa solução está certa é pensar em número maior de portas, por ex. dez, e repetir as operações. Escolhemos A e abrimos todas as outras com exceção de B. A probabilidade de acertar era de 1/10 e a de B é de 9/10. Mais fácil de perceber que devemos trocar.

Aniversários

Outro tema em que nossas percepções parecem nos enganar é o dos aniversários. Recentemente uns amigos, em grupo de quinze pessoas, fizeram uma viagem de 18 dias. Comentaram que nesse período comemoraram 2 aniversários. À primeira vista, parece muito. Sendo 15 pessoas em 18 dias com o ano com 365 dias, parece que deveria haver menos aniversários. Será? Qual a probabilidade, nessas condições, de que se comemore um aniversário?

Vamos usar mais uma vez a fórmula complementar. Calcular a chance de não haver aniversários e obter o complemento. Essa probabilidade é de (347/365) elevado a 15, o que dá 0,445 e portanto, seu complemento, a chance de que haja uma comemoração, é de 0,5547, ou 55,47%, maior do que 50%. Portanto, não há nenhuma surpresa em ter havido festas!

Um problema clássico é o dos aniversários simultâneos em um grupo de pessoas. Estando juntas 40 pessoas, qual a chance de haver ao menos duas com aniversário no mesmo dia? Um artigo publicado no ano 2000, e que pode ser encontrado na internet (Folha de S.Paulo - Fovest - 03/10/2000 (uol.com.br)), analisa esse tema. Curiosamente sua abordagem é parecida com a nossa, e o artigo começa assim: "O cálculo de probabilidades pode ser tão surpreendente que alguns resultados fogem totalmente ao senso comum". No caso de 40 pessoas há uma probabilidade de 89% de que ao menos duas façam aniversário no mesmo dia e com 50 pessoas a probabilidade sobe para 97%, quase uma certeza.

Alguns números no jogo de Bingo

Há muitas formas de se organizar o Bingo. Basicamente depende de quantos números serão sorteados no total (T), de quantos terá cada cartela (c) e do que será premiado, em geral a cartela cheia e talvez um conjunto de linhas.

Para ver alguns números vamos considerar um sorteio com 75 números, cada cartela com 25, sendo 5 colunas, números de 1 a 15 na primeira coluna, de 16 a 30 na segunda e assim sucessivamente.

O número de cartelas possíveis nesse exemplo é muito elevado, algo em torno de 243 x 10 elevado a 15 (ou 3003 elevado a 5).

À medida que o jogo vai se desenvolvendo, a chance de sair cada número em nossa cartela é de exatamente 1/3 quando começa e de um valor próximo a esse a seguir. Por isso, se tivermos um terço dos números sorteados na nossa cartela estamos na média. Outros estarão abaixo e alguns acima. Um destes últimos vai ganhar.

Uma pergunta que surge é qual a probabilidade de um jogador ganhar em determinado momento do jogo. Duas posições são básicas: a menor e a maior. Vamos começar por esta última. Qual a probabilidade de o jogo só terminar, para uma cartela, no último número sorteado? Em outras palavras, qual a chance de ter na minha cartela o último número sorteado? Considerando que o total de números (T) é o triplo de cada cartela (c), isto é T= 3c, podemos dizer que essa probabilidade, antes do jogo começar, é de 1/3. Como dissemos, probabilidade de um evento é o número dos favoráveis, dividido pelo de possíveis. Podemos imaginar a lista de números sorteados como uma sequencia de T números. Se listarmos todas, quantas vão terminar com um dos números de c? Pela simetria dos números 1/3 do total. Logo nossa probabilidade é de 1/3.

Vamos à outra posição. Qual a probabilidade de um jogo terminar depois de exatos c números, isto é, todos os números sorteados estarem em uma cartela. Por dois caminhos podemos chegar ao resultado. Um é ir multiplicando as probabilidades de que qualquer número sorteado esteja na cartela. A primeira é de c/T, a segunda de $c-1/T-1$, até a de $1/T-c+1$. Essa expressão corresponde à formula $c! \times (T-c)! / T!$. Outra forma de resolver o problema é pensar que todas as sequências que resolvem nossa questão começam com um arranjo dos c primeiros números. O número dessas sequências é de $c! \times (T-c)!$. Como a probabilidade é esse número dividido pelo total de sequências que é de $T!$, chegamos à mesma fórmula. Mais adiante vamos aplicar essas fórmulas a alguns exemplos numéricos e será mais fácil entender o que representam.

O curioso é que essas duas fórmulas, das probabilidades nessas duas casas, são absolutamente gerais e valem para quaisquer números. A única hipótese especial que fizemos foi a de $T= 3c$ no primeiro caso, e chegamos à probabilidade de $1/3$. Com $T = nc$, a probabilidade será de $1/n$.

https://www.mcleansherwood.com/products/cgmbingo-machine-manual

Como é de se esperar a segunda probabilidade é um número bem pequeno, e que aumenta com o valor de T. Sempre supondo $T= 3c$, com $T= 6$ a probabilidade é de $p = 1/15$, com $T= 9$ $p= 1/84$ e com $T= 15$ já é algo como 3 em 10.000.

Isso nos leva de volta à pergunta. Qual a chance de um jogo terminar em determinado ponto, com um número n de pedras sorteadas?

Probabilidades de o jogo acabar

Muitas funções estatísticas regem-se pela curva de Gauss que tem a forma aproximada de um sino. Quando temos uma variável com uma média, muitos resultados sairão próximos a essa média e à medida que se afastam irão sendo em menor número, dando o que chamamos curva de Gauss. Pensemos em grupo de mil homens e vamos registrar sua altura. Supondo que a média de altura é de 1,70 m, se pusermos em um gráfico a quantidade de pessoas com certa altura em função da altura teremos uma curva desse tipo. Poucos mais baixos, grande concentração em torno dos 1,70 e poucos mais altos.

Será que a probabilidade do jogo terminar segue uma função desse tipo? A resposta é não. A probabilidade vai aumentando da casa c até a casa T, que são as que vimos antes.

Para entendermos melhor vamos usar números baixos. A Matemática nos reserva uma surpresa e soluções que mostram a beleza surpreendente dessa matéria.

Um jogo muito simples e praticamente inviável seria um bingo com 3 números no total e cada cartela com apenas um número. Estamos usando apenas para fixar as ideias. As chances de o jogo acabar em determinada casa seriam:

Casa	1	2	3
Probabilidade	0,33	0,33	0,33

Reparem que os cálculos que fizemos antes para as casas T e c são válidos nessa tabela.

Um Bingo com 6 números e 2 em cada cartela

Este também um jogo pouco viável, que estamos utilizando apenas pela facilidade de fazer cálculos e fixar ideias.

Neste caso temos 6 bolinhas para serem sorteadas. O Jogo só pode acabar a partir da segunda bolinha e, de acordo com o que já vimos, temos P2= 1/15 e P6= 1/3, chamando de Pn a probabilidade de o jogo acabar na casa n.

Vamos chamar de Pr;s a probabilidade de o jogo acabar entre as casas r e s.

Calculemos P5. Esse valor é igual a (1-P6) multiplicado por 2/5, isto é, a chance de não acabar na última casa, vezes a de sair uma pedra da cartela na quinta casa. Esse valor é 4/15.

Com esse raciocínio, podemos chegar a uma fórmula:

$$Pn = (1 - Pn+1;T) \times c/n$$

Aplicando essa fórmula, chegamos à seguinte tabela:

Casa	1	2	3	4	5	6
Probabilidade	0	1/15	2/15	3/15	4/15	5/15

Um resultado belíssimo que a Matemática nos oferece!

O que vemos é a probabilidade de o jogo terminar vai aumentando à medida que vai evoluindo e atinge seu ponto máximo na última casa com o valor de 1/3. Essa é a probabilidade de cada casa, o que não significa que vá terminar na última. Individualmente ela é a maior, mas a chance de terminar antes é o dobro, 2/3. Como já dissemos essas são probabilidades antes do jogo começar. A partir da primeira pedra elas já começam a mudar.

Voltando às curvas de Gauss, elas devem estar presentes aqui. Se fizéssemos a contagem de quantas pedras foram sorteadas cada vez que um jogo acaba e puséssemos em um gráfico ele teria provavelmente uma semelhança com uma curva de Gauss, mas com um corte abrupto na última casa.

Como curiosidade apresento o mesmo cálculo para um jogo de 9 números, com 3 em cada cartela:

Casa	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Prob	0	0	1/84	3/84	6/84	10/84	15/84	21/84	28/84

Outro resultado belíssimo! Reparem que as diferenças entre os números dessa tabela vão subindo de forma uniforme de modo que entre a casa 3 e a 2 é de 1/84, entre a 4 e a 3 de 2/84 e assim por diante, até 7/84.

Conclusão

Esta brincadeira com os números nos mostra que nem sempre o que nos parece mais provável de fato o é, as probabilidades, às vezes, gostam de nos enganar.

Mostrou-nos também um pouco da beleza da Matemática, e que as chances de um jogo de Bingo acabar são cada vez mais altas ao final, o que era esperado. Quanto mais pessoas jogando, mais chance de um ponto fora da curva. Se isso não vai ajudá-lo a ganhar, ao menos vai facilitar uma melhor compreensão do que está acontecendo. Então paciência, e... boa sorte!

Recebido para publicação em 11-09-22; aceito em 14-10-22