Revista Internacional d'Humanitats 59 set-dez 2023
CEMOrOc-Feusp / Univ. Autònoma de Barcelona

Nota sobre contos árabes e problemas matemáticos

João Sérgio Lauand[1]

Contos árabes e problemas matemáticos

Exploramos nesta nota alguns problemas matemáticos de grande beleza. Alguns procedem do livro "O homem que calculava", de Malba Tahan, publicado em 1938 e que continua sendo, ainda hoje, popularíssimo e conta já com mais de 100 edições. Outro é uma questão clássica que permite, além de uma solução muito engenhosa, uma relação muito interessante com a teoria das bases numéricas.

Um dos autores que me acompanharam na infância e juventude foi Malba Tahan, com seus livros deliciosos de contos árabes. Na verdade era um professor brasileiro, Julio César de Mello e Souza, que adotou esse pseudônimo. Tive a chance de cumprimentá-lo um dia. Garoto ainda, passávamos férias em Águas de Lindóia, e um tio nos apresentou seu amigo: para minha decepção, não um beduíno do deserto, mas um simpático senhor carioca, que nunca usou turbante e – sempre professor – me fez, na breve conversa, uma pequena sabatina informal sobre as matérias da escola…

Passadas muitas décadas, ainda me lembro de algumas histórias, meio apagadas pelo tempo transcorrido. Cheias de poesia, valores e de uma sadia ingenuidade. Como a do homem que faleceu e em seu julgamento lhe perguntaram o que havia feito de bom. Não se lembrava de nada. Com muito esforço, recordou que havia salvado uma aranha, deixando de pisar nela. Foi o suficiente para que começasse a descer um fio muito fino, uma teia de aranha, no fosso em que ele se encontrava, permitindo que subisse. Quando estava a meio caminho reparou que outros estavam também subindo pelo fio. Ficou com medo e começou a gritar-lhes para descerem. Seu egoísmo foi punido. O fio se rompeu, não pelo peso, mas pela sua atitude e todos ficaram sem poder subir.

Em outra, um jovem viajante, cansado do caminho, deita em baixo de uma árvore e adormece. Enquanto ele repousa passam por aquele caminho vários outros viajantes, veem o garoto dormindo, pensam em acordá-lo, mas acabam deixando para depois. Passam por ele o Amor, a Fortuna, a Morte...Ficam muitas ideias na cabeça do leitor: como nosso futuro é imprevisível, quantas oportunidades passam perto de nós, como a vida é frágil.

O Homem que calculava

Um de seus livros de teor diferente é "O Homem que calculava". Para muitos, como no meu caso, uma introdução divertida à beleza da Matemática e suas questões lógicas. Lembro-me de uma história. Um rei tinha três contadores, bons matemáticos, que foram acusados de roubá-lo. Ele os condenou, mas reservou-lhes uma chance de

[1]. Doutor em Educação pela Feusp.

se salvarem caso acertassem um problema lógico. Foram postos em fila, cada um com um cartaz nas costas, escolhidos entre 3 pretos e 2 brancos. O primeiro a tentar adivinhar a cor do cartaz de suas costas, via os outros dois. Ele arriscou e errou. Foi morto. O segundo sabia do acontecido, via a cor do companheiro à frente, mas não ouviu a cor dita pelo anterior. Como este, arriscou, errou e foi morto. De posse dessas informações o contador restante ficou feliz e pensou: "estou salvo". Quais foram as cores, quais os palpites e por que o último tinha a certeza de estar salvo? Respostas no final.

O problema dos 35 camelos

Um problema clássico que consta do livro é o dos 35 camelos. Um homem viajava com seu amigo matemático em seu camelo, quando se depararam com uma discussão familiar. Três irmãos discutiam como resolver uma situação criada em relação à herança do pai. Ao falecer este deixou 35 camelos para serem repartidos entre os 3 filhos, sendo metade para o primeiro, um terço para o segundo e um nono para o terceiro. Na verdade, a história é uma dessas que nasce de uma equação: 1/2 + 1/3 + 1/9 = 17/18 ou 34/36.

Um estudioso da cultura árabe, Jean Lauand, me disse que essa situação é improvável na tradição islâmica, que não comporta essa liberdade para determinar as porcentagens da herança: os valores estão previstos pelo próprio Alcorão (Sura IV). Precisamente essa exigência religiosa foi um dos motivos para o surgimento da álgebra na Casa da Sabedoria de Bagdá: para resolver as intrincadas equações que surgem essa sura.

Voltando aos filhos, um receberia 17,50 camelos, outro 11,66 e o último 3,88. Como resolver? O matemático intervém, pede o camelo emprestado ao amigo, dando um total de 36, que se repartem em 18, 12 e 4 para os irmãos, devolve o do amigo e fica com o que sobra. Que aconteceu? Os filhos ficaram contentes, mas ganharam ou foram enganados? Foi bom porque a questão foi resolvida, mas tinham recebido 35 camelos e agora juntos têm 34.

Vamos à solução. O que fica escondido nas entrelinhas da historia é que o pai não destinou aos filhos o total de camelos. A soma das porcentagens, como já dissemos, resulta em 34/36. Aplicando esse valor aos 35 camelos a soma do que se distribui é 33,05 sobrando 1,95. Já com o camelo emprestado, ficam 34 para os filhos e sobram 2, um é devolvido e o matemático pega o que sobra!

As doze bolinhas

Uma questão clássica e que expõe também a beleza da Matemática é o das 12 bolinhas (ou pérolas, se quisermos fantasiar). Onze delas têm o mesmo peso e a última é ligeiramente diferente, não sabemos se para mais ou menos. O problema é descobrir qual é a bolinha e se é mais leve ou mais pesada, servindo-se de 3 pesagens feitas em uma balança de comparação, com dois pratos. Em cada uma das pesagens a balança indica os pratos leve e pesado.

À primeira vista parece impossível. Como determinar uma diferença para mais ou menos em doze bolinhas, o que resulta em 24 alternativas, só com 3 pesagens? Por outro lado, cada pesagem nos dá 3 possibilidades (igual, maior ou menor), e sendo 3 poderemos ter 27 possibilidades, contra as 24 alternativas das bolinhas. Se houver uma solução o que representa a diferença de 3 entre 27 e 24?

Vamos a uma solução. Há várias soluções possíveis. Vamos apresentar uma delas. Começamos colocando em um prato as bolinhas de 1-4 e no outro as de 5-8. O resultado pode ser igual (0), maior (1) ou menor (2).

Comecemos com igual (0). Significa que a bolinha diferente está entre 9-12. Temos 8 possibilidades, com qualquer uma delas sendo mais leve ou mais pesada. Neste caso a segunda pesagem será 9-10 com 11 e 1. Se der igual a bola diferente é a 12 e basta compará-la com qualquer outra para saber se é mais pesada ou leve. Nesta pesagem temos certeza de que a bolinha 12 é diferente e, portanto, a pesagem não pode ser igual. É uma daquelas 3 a que havíamos nos referido, e que não podem acontecer. Se a segunda pesagem der maior, temos 9 ou 10 mais pesadas ou 11 mais leve. Basta então comparar 9 com 10 e o resultado indicará a solução. Se a segunda pesagem der menor, a solução é semelhante à de resultado maior, pesando as mesmas bolas. Assim, se a primeira pesagem der resultado igual, teremos a bola diferente de 9 a 12, e as duas pesagens seguintes vão determiná-la.

A segunda possibilidade para a primeira pesagem é o prato de 1-4 ser mais pesado que o de 5-8 (1). Aqui também teremos 8 possibilidades: ou as do primeiro prato são mais pesadas ou as do segundo são mais leves. Vamos fazer a segunda pesagem entre 1,2,5 por um lado e 3,6,12 no outro. Esta é talvez a parte mais importante da solução: dividir o grupo de 8 bolinhas em 3, misturando as possíveis pesadas com as possíveis leves. Teremos como resultado: igual, maior ou menor. Caso seja igual teremos 4 mais pesada ou 7 ou 8 mais leve. A terceira pesagem é 7 com 8. Dando igual, teremos 4 mais pesada. Sendo diferente, indicará 7 ou 8 como mais leve. Se a segunda pesagem indicar o primeiro prato como mais pesado, teremos 1 ou 2 mais pesada ou 6 mais leve. Basta então comparar 1 com 2 e teremos o resultado. Finalmente, o segundo prato pode ser mais pesado o que indica 3 mais pesada ou 5 mais leve. Neste caso comparamos 3 com 12 e só teremos 2 possibilidades: mais pesada, indicando que 3 é a mais pesada ou igual significando que 5 é a mais leve. Não existe a possibilidade de menor.

Caso o prato com 1-4 seja mais leve que o de 5-8 a solução (2) é totalmente análoga à que acabamos de indicar, com o prato mais pesado.

Resumindo: fazemos a primeira pesagem, com resultado: igual, maior ou menor. A seguir, cada alternativa indicará 8 resultados e uma impossibilidade, dando no total as 24 alternativas mais as 3 impossibilidades, que somam as 27 variantes que podem resultar das 3 pesagens com 3 chances cada!

As bases numéricas

Até aqui já temos uma solução belíssima, mostrando as possibilidades matemáticas. Mas há ainda uma observação surpreendente que podemos fazer. Para isso precisamos recordar os conceitos de bases numéricas. Trabalhamos comumente com a base 10. Um número qualquer é lido de acordo com as potências de 10. Por exemplo, escrever 576 significa ter 6 x 1 mais 7 x 10 mais 5 x 100.

Uma base muito utilizada pelos sistemas digitais é a do número 2. Tomemos um exemplo para entender como se representa um número nessa base: (10010)2 se calcula 0 x 1 mais 1 x 2 mais 0 x 4 mais 0 x 8 mais 1 x 16 sendo então (10010)2 = 18

Poderíamos ter uma base 12 e para isso seriam necessários mais dois símbolos, um para o 10 e outro para o 11, por ex., # e $. O número (#25)12 = 5 x 1 + 2 x 12 + 10 x 144 = 173.

A base 3

Se considerarmos a base 3, só poderemos trabalhar com os algarismos 0, 1 e 2. Assim, a sequência de números de 0 a 10, nessa base, seria: 0, 1, 2, 10, 11, 12, 20, 21, 22, 100 e 101.

Utilizar esta base vai nos possibilitar relacionar os 27 números que vão de 0 a 26 com as 27 pesagens que fizemos, sendo cada pesagem um resultado possível para o nosso problema.

Vamos associar cada resultado possível de pesagem a um número, sendo igual, maior e menor respectivamente a 0, 1 e 2. Aplicando esse critério ao texto acima, a sequência igual, igual, igual era impossível, igual, igual, maior resultava 12 pesada (12P) e igual, igual, menor em 12 leve (12L). Assim, com a sequência que seguimos no nosso texto, temos a solução:

0 000 Impossível
1 001 12P
2 002 12L
3 010 11L
4 011 9 P
5 012 10P
6 020 11P
7 021 10L
8 022 9 L

9 100 4 P
10 101 8 L
11 102 7 L
12 110 6 L
13 111 1 P
14 112 2 P
15 120 5 L
16 121 3 P
17 122 Impossível

A última sequência, da terceira possibilidade, com a primeira pesagem dando menor, levaria aos números de 18 a 26 e, como já se disse, é semelhante. Magnífico, não?

Solução da questão dos contadores e dos cartazes

Sabemos que todos os contadores eram bons matemáticos. Então, o primeiro a arriscar a cor do seu cartaz não estava vendo nas costas dos outros dois cartazes brancos. Ele saberia que o seu seria preto. Não sabemos a cor nem o que ele disse.

O segundo sabia que o primeiro não viu dois brancos. Ele viu ou preto e branco ou dois pretos. Se ele visse um branco no primeiro ele acertaria o próprio. Não sabemos que cor tinha, nem o que disse, só que ele não viu um cartaz branco. Esse foi o raciocínio que levou o último a saber que seu cartaz era preto.

Há muitos problemas que usam a lógica ou a matemática. Uns mais fáceis outros difíceis e, de vez em quando, encontramos alguns de grande beleza, como os que vimos acima.

Recebido para publicação em 27-10-22; aceito em 29-11-22