Fundamentos filosóficos da matemática e seus reflexos no contexto escolar[1]

Cristiane Maria Cornelia Gottschalk[2]

Resumo: As concepções filosóficas hegemônicas sobre a natureza do conhecimento matemático (intuicionismo, formalismo e logicismo) repercutem nas práticas pedagógicas escolares, por vezes, conduzindo a confusões decorrentes de crenças equivocadas, tais como, a de que as proposições da matemática se aproximariam das hipóteses das ciências empíricas (realismo empirista), como também a de que a atividade matemática decorreria de operações mentais a serem potencializadas pela escola (idealismo). Para esclarecê-las, recorreremos às idéias do segundo Wittgenstein que, ao mesmo tempo em que considera como pertinentes alguns dos pressupostos das correntes filosóficas acima, faz também críticas a elas, ao mostrar que todas se ancoram em uma concepção referencial da linguagem, vista por ele como cerne das confusões de natureza conceitual. Forjando ferramentas como os conceitos de "jogo de linguagem" e "seguir regras", o filósofo austríaco nos possibilita outro olhar sobre a natureza do conhecimento matemático, vendo-o como uma atividade *normativa*, cujos enunciados têm o caráter de regras, imersos em nossas formas de vida. Desta perspectiva, esclarece-se completamente (e não definitivamente) os equívocos a que somos levados em nossas práticas pedagógicas quando se postula significados extralingüísticos que corresponderiam, de algum modo, aos nossos enunciados matemáticos.
Palavras chave: filosofia da educação matemática, Wittgenstein, jogo de linguagem, seguir regras, concepção referencial da linguagem, ensino, aprendizagem.

Abstract: The predominant philosophical conceptions about the nature of mathematical knowledge (intuitionism, formalism and logicism) reverberate on pedagogical school practices, sometimes leading to confusions due to mistaken beliefs, such as, that mathematical propositions would be similar to the hypotheses of empirical sciences (empirical realism), as well as, that mathematical activity is derived from mental operations to be strengthened in school (idealism). To clarify them, I will recur to the ideas of Wittgenstein, who accepts as pertinent some of the presuppositions of these philosophical trends, but also criticizes them, when he shows that all of them are anchored to a referential language conception, seen by him as the essence of the confusions of a conceptual nature. Forging tools like the concepts of "game of language" and "to follow rules," the Austrian philosopher makes possible another view of the nature of mathematical knowledge, considering it a *normative* activity, whose enunciations have the character of rules, ingrained in our forms of life. From this perspective, it is possible to clarify completely (and not definitely) the misunderstandings to where we are led to in our educational practices, when extra linguistic meanings are postulated corresponding, in some way, to our mathematical enunciations.
Keywords: Philosophy of mathematical education, Wittgenstein, game of language, to follow rules, teaching, learning.

> *Para que a matemática necessita de uma fundamentação? Creio que necessita disto tão pouco quanto as proposições que tratam de objetos físicos ou as que tratam das impressões dos sentidos necessitam de uma análise. Embora precisem sim, tanto as proposições matemáticas como as demais, de uma clarificação de sua gramática.*
>
> Wittgenstein

[1] Este texto foi apresentado parcialmente no *XI Encontro Nacional de Educação Matemática* (*ENEM*), realizado pela PUCPR, na mesa-redonda "A pesquisa em educação matemática: olhares sociológicos e filosóficos", em julho de 2013, em Curitiba.

[2] Professora doutora da Faculdade de Educação da USP e coordenadora da área de Filosofia e Educação do Programa de Pós-graduação da Faculdade de Educação da USP.

A reflexão filosófica contemporânea sobre a natureza do conhecimento matemático pode ser esquematicamente representada através de três grandes movimentos: o logicismo, o intuicionismo e o formalismo. Em todos eles aparece a idéia de que haveria algum tipo de realidade matemática a ser descoberta pelos matemáticos; ou seja, acredita-se que a matemática se refira a um mundo ora povoado por entidades abstratas (logicismo), ora ancorada em processos mentais (intuicionismo) ou ainda, se resumiria a signos físicos, escritos ou sonoros (formalismo). Estas diversas concepções sobre os fundamentos da matemática se refletem na educação matemática de diversas maneiras, dentre elas, destacaremos duas abordagens presentes nas diretrizes oficiais do governo brasileiro para o ensino desta disciplina: uma empirista e outra idealista[3].

A concepção empirista da atividade matemática, herdeira de algumas idéias do logicismo e do formalismo, inspira-se metodologicamente nos modelos das ciências da natureza: as proposições matemáticas são vistas como hipóteses a serem testadas e suas demonstrações como experimentos em um processo contínuo de exploração e de descoberta de entes matemáticos.

Por outro lado, a concepção idealista do saber matemático, influenciada pelo intuicionismo, parte do pressuposto de que a atividade matemática decorreria de supostas operações mentais a serem potencializadas pela escola. Basta lembrar do *slogan* construtivista de que "é o aluno que constrói seu próprio conhecimento", como se fosse possível alcançar qualquer conhecimento, inclusive o matemático, por si só, bastando para isto que sejam propiciadas condições suficientes de aprendizagem. O que une estas duas concepções de atividade matemática (a idealista e a empirista) é a crença de que haveria um significado essencial dos entes matemáticos fundamentados numa intuição, ou numa ação empírica, ambas consideradas condições extralingüísticas para a sua aquisição. Em outras palavras, é como se a atividade matemática se referisse a algo existente *a priori* no sujeito ou no mundo externo, e que passa a ser expresso linguisticamente, onde a linguagem matemática teria uma função meramente descritiva ou comunicativa. Suas proposições teriam a função de *descrever* uma realidade externa a elas, seja esta uma realidade ideal ou um modo específico de expressão de processos mentais. É neste sentido que, nas práticas pedagógicas mencionadas acima, faz-se um *uso referencial* da linguagem matemática.

No entanto, quando consideramos a matemática como descritiva do espaço físico (conhecimento empírico) ou produto de estruturas cognitivas, geramos problemas filosóficos do seguinte tipo: os objetos matemáticos existem *a priori* ou são construídos? Qual é o modo pelo qual são descobertos ou construídos? Em que sentido podemos dizer que a matemática é *a priori*? Se partirmos do pressuposto de que o conhecimento empírico é o conhecimento que requer justificação da experiência, em contraposição ao conhecimento *a priori*, que prescinde dessa justificação, como então considerar o conhecimento matemático? É *a priori* ou empírico? E a indagação que mais intriga os filósofos da matemática: se a matemática é, em grande parte, um jogo mental, uma ciência objetiva e racional que parte de alguns princípios ou axiomas preestabelecidos, como pode coincidir com o comportamento natural das coisas? Esperamos ir "dissolvendo" parte dessas questões, recorrendo fundamentalmente a algumas idéias de Wittgenstein sobre os fundamentos da matemática, o qual, ao atentar para as diversas funções de nossa linguagem, esclareceu em muitos aspectos a

[3] A análise mais detalhada destas abordagens pode ser encontrada em Gottschalk (2002), tese de doutorado em que a autora faz uma reflexão filosófica sobre a concepção de matemática presente nos *Parâmetros Curriculares Nacionais* (Brasil, S.E.F., 1997). No presente texto serão retomadas algumas idéias centrais de Wittgenstein que possibilitaram a crítica a este documento.

natureza do conhecimento matemático, com implicações para as práticas pedagógicas desta disciplina.

Matemática: conhecimento *a priori* ou empírico?

Segundo o filósofo da matemática Stephen Barker (1969) , há basicamente dois tipos de conhecimento: o empírico e o *a priori*. Áreas como a física, a biologia e a história assentam suas conclusões em observações (conhecimento empírico), enquanto uma matéria como a lógica busca obter conhecimento *a priori* das regras que governam a validade dos argumentos. Estaria a matemática mais próxima da lógica ou da física? Com as geometrias não euclidianas, surgem novas dúvidas na filosofia da matemática: o que pode ser considerado termo primitivo e o que é uma definição? Por exemplo, o termo "inclinação" seria primitivo, definindo-se, por seu intermédio, "ângulo plano"? Ou seria "ângulo plano" a noção primitiva do sistema, entendendo-se que o termo "inclinação", extra-sistema, serviu apenas para elucidá-la?

Além destas questões, surge outra mais crucial: haveria uma geometria que descrevesse mais fielmente o nosso mundo? Como por exemplo, a geometria euclidiana vigente por mais de dois milênios na civilização ocidental? O fato de a teoria da relatividade de Einstein ter se utilizado da geometria riemanniana, portanto não euclidiana, tornou-se a prova da completa refutação das idéias de Kant sobre o espaço, a saber, de que haveria estruturas *a priori* no indivíduo, e que revestiriam o mundo de uma forma euclidiana[4]. Chegou-se à conclusão de que o que temos, na verdade, são diferentes modelos, ou melhor, diferentes escolhas que permitem descrições mais ou menos adequadas do mundo em função de determinados objetivos. Nestes modelos, empregam-se definições com o objetivo de aumentar o poder dedutivo dos sistemas. Podemos ter várias definições, todas igualmente legítimas, contanto que preservem a verdade dos teoremas e a falsidade das sentenças falsas. No entanto, esse não é o único papel de uma definição. Alguns filósofos se detiveram no caráter constitutivo das definições e dos axiomas na linguagem matemática, ou seja, investigaram o papel que estas cumprem na atribuição de significados a outras proposições. Dentre esses filósofos, Wittgenstein[5] tem uma posição extremamente original e esclarecedora sobre esse processo. Suas observações sobre a matemática são de extremo interesse, a nosso ver, para compreender como atribuímos significados não só às proposições matemáticas, mas às nossas proposições em geral. Vejamos algumas de suas idéias a fim de esclarecer a especificidade das proposições matemáticas e, por conseguinte, a natureza dessa atividade, tendo em vista o seu ensino e aprendizagem.

Algumas idéias de Wittgenstein

Wittgenstein estende a idéia de que há diferentes formas de descrever cientificamente fenômenos físicos para *qualquer descrição empírica*, ou seja, *toda descrição* supõe formas representacionais, denominadas por ele de gramática dos usos da nossa linguagem. Entretanto, não utilizará o termo "gramática" em seu sentido usual, mas o fará para designar as regras constitutivas da linguagem e também a sua organização, ou seja, sua "gramática profunda". Essas regras seriam parte da significação de uma palavra, determinam o que tem sentido e o que não tem sentido

---

[4] Refiro-me às formas da intuição postuladas por Kant, como as do tempo e do espaço.

[5] Cerca de metade dos escritos de Wittgenstein no período entre 1929 e 1944 tematizaram a filosofia da matemática.

dizer. Recorremos a técnicas lingüísticas que se entrelaçam com conteúdos extra-lingüísticos com o intuito de dar sentido à experiência. Por exemplo, através de uma tabela de cores, associamos imagens de cores às palavras que convencionamos corresponderem a essas cores. No entanto, nem as imagens e nem a tabela de cores são a base dessa atividade lingüística. Tanto os conteúdos exra-lingüísticos como a técnica utilizada fazem apenas parte dos jogos preparatórios que precedem o estabelecimento de relações conceituais entre as cores. Ainda estamos no terreno das palavras, preparando a área para a formação de uma "gramática das cores". Esta se constitui à medida que estabelecemos relações conceituais *a priori*, também convencionais, que são nossas certezas sobre essa região da percepção: "o branco é mais claro que o preto", "as cores azul, vermelha e amarela são cores puras (primárias)", "ao misturar o azul com o amarelo, obtemos a cor verde" e assim por diante. Depois de estabelecer essas relações conceituais, ou seja, uma forma de representação, estamos em condições de fazer descrições: passa a ter sentido dizer que "essa mesa é marrom", "essa parede é branca" e assim por diante. As formas de representação estão profundamente incorporadas em nossos modos de agir e expressar. Embora tenhamos uma certa liberdade para escolher nossas formas de representação, uma vez escolhida uma gramática, essa liberdade não se transmite às descrições de dentro dessa gramática. Por exemplo, não tem sentido dizer que duas cores diferentes estão no mesmo ponto de um espaço visual ao mesmo tempo, ou que "a parede branca é mais escura do que a preta", se considerarmos nossa forma usual de representação das cores.

Mas é só na aplicação das palavras que se mostra o uso que é feito do conceito e, por conseguinte, seu sentido. Dizer "essa parede é branca" pode tanto ter uma função descritiva quanto uma função gramatical – podemos *descrever* a parede ou utilizá-la como um *paradigma* da cor branca. O caráter *a priori* das regras de representação é fundamental para compreendermos esses diferentes usos das proposições que empregamos ora como regras gramaticais, ora como descrições, independentemente dos conteúdos de que partimos (seja uma parede ou qualquer outro objeto de cor branca).

Essa distinção é importante não só para dissolver problemas filosóficos, mas também para evitar confusões já em curso nas atuais práticas pedagógicas. Na base dessas confusões, encontramos uma concepção referencial da linguagem que vem desde as primeiras tentativas metafísicas dos filósofos para apreender o significado de determinados conceitos ao procurarem significados essenciais por detrás da multiplicidade de seus usos em situações empíricas. Por exemplo, vejamos como utilizamos a palavra "igual" em nossas expressões lingüísticas. Quando observo duas pessoas caminhando juntas e digo: "O tamanho deles é igual!" estou utilizando esta palavra do mesmo modo de quando digo "2 + 2 = 4"?

No primeiro caso estou utilizando a palavra "igual" no sentido descritivo, estou descrevendo uma situação empírica, enquanto que no segundo caso o que estou dizendo é que dois mais dois *deve* ser igual a quatro, ou seja, estou utilizando esta palavra no sentido normativo. Em outras palavras, "igual" pode descrever algum fato, como o tamanho de duas pessoas, e, em outro contexto lingüístico como o da matemática, já tem outro uso, a saber, como regra a ser seguida. Para Wittgenstein, a confusão se instala quando não distinguimos entre o uso gramatical e o uso empírico de nossos enunciados, reduzindo nossas formas de representação a proposições empíricas, o que revela uma concepção referencial da linguagem subjacente às nossas teorias do significado.

Através dessas observações filosóficas, Wittgenstein faz uma crítica à concepção referencial da linguagem que permeia a reflexão filosófica sobre a natureza dos nossos saberes em geral, ou seja, à idéia de que haja um significado essencial por trás das palavras. Segundo o filósofo, as palavras são utilizadas numa infinidade de maneiras diferentes e aparentadas umas com as outras de diversos modos. Não há algo comum a todas as aplicações de uma palavra que nos daria a sua "essência". Cada palavra tem uma família de significados, como uma corda trançada por diversos fios, mas com nenhum fio percorrendo-a do começo ao fim. Da mesma forma que o conceito de jogo, um mesmo conceito matemático pode ter significados diferentes como, por exemplo, o conceito de número, cujos significados são "próximos" um do outro, mas não exatamente os mesmos. Tanto os jogos quanto os números formam famílias semelhantes entre si.

No entanto, Wittgenstein utiliza a palavra *jogo* não só como exemplo paradigmático do fato de não existirem características essenciais da linguagem, mas também para dar a idéia de uma atividade regrada. Aprender o significado de uma palavra pode consistir na aquisição de uma regra, ou um conjunto de regras, que governa seu uso. Uma das conseqüências dessa idéia é que não há sentido em ensinar um significado essencial de uma palavra independente de seus diversos usos. Uma palavra só adquire significado quando se opera com ela, ou seja, seguindo uma regra[6].

Seguir uma regra

O que significa seguir uma regra? E como decidir quando a regra está sendo seguida? Para o filósofo, seguir uma regra é semelhante a obedecer a uma ordem. Somos treinados [*abrichtet*] a fazê-lo; reagimos a uma ordem de determinada maneira. Mas e se uma pessoa reage de um modo e outra, de outro à ordem e ao treinamento? Qual estará certa? Segundo ele, a maneira comum de agir das pessoas (ou, mais literalmente: 'A maneira humana comum de agir') é o quadro de referência mediante o qual interpretamos uma linguagem desconhecida. Assim, é apenas o esquema comum de modos de comportamento partilhados que pode nos dizer se alguém seguiu uma determinada regra. A maneira como reagimos é um dos aspectos que revelam se seguimos a regra corretamente. Por exemplo, ao ouvir a palavra "igual", podemos entendê-la no sentido de mesmo tamanho (se estivermos comparando fisicamente duas pessoas) ou como uma das normas da matemática. Associamos as palavras a técnicas diferentes, dependendo do contexto em que nos encontramos.

Vejamos como isto ocorre em uma aula aula de matemática. Os objetos da matemática não têm propriedades a serem descritas como ocorre com os objetos de natureza empírica. Por exemplo, ao ensinar o conceito de triângulo recorremos a diversas formas triangulares como *meios* de apresentação para a formação desse conceito, as quais servem como regras para a utilização da palavra *triângulo*. Uma vez formado esse conceito, este prescinde da existência de formas triangulares para que tenha significado e possa ser aplicado. Nesse sentido, a definição da palavra *triângulo* – "um polígono fechado de três lados" – é *gramatical*. Dizer que o triângulo tem três lados não é uma *descrição* de triângulo – essa proposição *define* o que é um triângulo. Estabelece-se uma conexão interna entre conceitos. A palavra "triângulo" não se refere a algum ente ideal em um céu platônico, a definição deste símbolo é apenas uma regra para o seu uso. Assim, compreender uma palavra como "triângulo" é saber

6 O conceito de regra aqui deve ser entendido num sentido bem geral: embora tenha função normativa, não se reduz a comando e ordens. As regras de nossa linguagem cotidiana, por exemplo, nos dizem o que é falar corretamente ou com sentido. São como padrões de correção, governando uma multiplicidade ilimitada de ocorrências.

seguir a regra de utilização dessa palavra, e não a apreensão do que *é* triângulo. É neste sentido que as definições têm um uso gramatical, e não descritivo.

Mas não apenas as definições da matemática são consideradas por Wittgenstein proposições gramaticais; toda proposição que envolve uma certeza também revela sua natureza gramatical. Por exemplo, a proposição "só eu mesmo posso saber se sinto uma dor" é uma proposição gramatical, pois não posso me representar o contrário disso. Da mesma forma, "toda mesa tem um comprimento". Já dizer que "esta mesa tem o mesmo comprimento que uma outra" é uma proposição empírica, descritiva, pois posso sem problemas imaginar uma proposição diferente dessa. "Pois aqui eu compreendo o que significa formar-se uma imagem do contrário." (Wittgenstein, IF, §251) Uma proposição é gramatical porque a usamos normativamente. Não podemos pensar o contrário do que ela exprime. Neste sentido, todas as proposições da matemática são de natureza gramatical. Dizemos "dois mais dois *deve* ser igual a quatro", ou que, "a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º", pois não podemos imaginar outros resultados. São regras a serem seguidas, daí o caráter apriorístico da matemática.

Assim, compreender uma proposição matemática significa compreender uma regra. Mas esta afirmação não é trivial. Para explicitá-la, Wittgenstein introduziu a noção de "seguir uma regra". Segundo ele, *compreendemos* uma regra se somos capazes de segui-la. Mas esta também não é uma afirmação trivial. Como saber se houve de fato compreensão da regra? Pode-se tê-la seguido casualmente ou ter seguido uma outra regra qualquer. Por exemplo, duas pessoas jogando xadrez. Suponhamos que a primeira conheça as regras do jogo e que esteja movendo as peças de acordo com as regras do xadrez. Já a segunda pessoa move-as de forma aleatória. Quais são os critérios para saber se o segundo "jogador" em um determinado momento seguiu de fato a regra ou se apenas agiu de acordo com ela? Como saber se o jogador *compreendeu a regra*? Seria um determinado estado mental do enxadrista a condição para que ele tenha seguido a regra com compreensão?

Em um primeiro momento, parece haver um abismo entre a regra e sua aplicação, que será transposto por um novo conceito forjado por Wittgenstein, o conceito de "jogo de linguagem". A meu ver, este é o "ovo de Colombo" que permite a transposição do aparente abismo entre a regra e sua aplicação.

Jogo de linguagem

Wittgenstein introduziu a expressão "jogo de linguagem" inicialmente para chamar a atenção para as semelhanças entre linguagem e jogos. Da mesma forma que um jogo, a linguagem também possui regras constitutivas que determinam o que é corrreto ou o que tem sentido (a gramática profunda dessa linguagem). Aos poucos, Wittgenstein vai ampliando o uso dessa expressão, que não mais emprega apenas para salientar o aspecto regulativo comum aos jogos e à linguagem, mas com a intenção de ressaltar o vínculo desta com as diversas atividades que a acompanham.

Por exemplo, o gesto ostensivo é um instrumento lingüístico que nos permite estabelecer uma ligação (interna) entre uma palavra e o objeto para o qual apontamos. Podemos imaginar outra forma de vida na qual esse gesto tivesse outro significado. A expressão "jogo de linguagem" enfatiza o papel que nossas formas de vida têm na utilização de nossas palavras. Todo jogo de linguagem envolve uma gramática dos usos, as quais estão ancoradas em uma práxis, em uma forma de vida. Nesse sentido, o elo semântico entre a linguagem e a realidade não é dado apenas pelas regras que governam a linguagem, mas pelos próprios jogos de linguagem, pois as regras só têm sentido contra o pano de fundo de um determinado jogo de linguagem. Por conseguinte, os jogos de linguagem têm primazia sobre as regras. Uma palavra só adquire significado quando se opera com ela, portanto, dentro de um jogo de linguagem, que seria para Wittgenstein, a totalidade formada pela linguagem e pelas atividades com as quais vem entrelaçada. A palavra jogo vem ressaltar as diversas atividades com as quais a linguagem se vincula.

A expressão "jogo de linguagem" é essencial na filosofia de Wittgenstein, que a emprega como um método para mostrar os diferentes usos dos conceitos em nossas formas de vida. As palavras não são utilizadas apenas para descrever; há muitos outros tipos de jogos além das descrições como contar piadas, orar, fazer saudações, perguntar, dar ordens e etc. É dentro desses jogos que os objetos adquirem significado, quando operamos com eles, e não quando simplesmente os relacionamos às imagens que fazemos deles. Desse novo ponto de vista, Wittgenstein faz uma crítica demolidora à concepção referencial da linguagem, pois não há mais necessidade de se postularem entidades extralingüísticas como condições necessárias da significação. Segundo ele, há como evitar as dificuldades do modelo referencial da linguagem ao considerarmos "as diversas práticas ligadas à linguagem como sendo o *meio* através do qual são estabelecidas as ligações entre signos e objetos e, além disso, como sendo instrumentos *lingüísticos.* É nesse sentido que tais práticas *fazem parte* da gramática dos usos." (Moreno, 1995, p. 25)

Enfim, com o conceito de "jogo de linguagem" Wittgenstein lança luz sobre relações de nossa linguagem, ao utilizá-los como objetos de comparação, ou seja, através de suas semelhanças e diferenças, chama a atenção para os diferentes usos de nossos conceitos em nossas formas de vida sem recorrer a entidades extralingüísticas. São os próprios jogos de linguagem que constituem as relações de significação básica (denominação) e são, portanto, os elos entre linguagem e realidade. Voltando ao nosso suposto abismo entre regras e sua aplicação, este é transposto por nossas práticas, dentro de um jogo de linguagem. "Seguir uma regra" é essencialmente uma prática:

> "Por isso, 'seguir a regra' é uma prática. E *acreditar* seguir a regra não é seguir a regra. E por isso não se pode seguir a regra 'privatim', porque, do contrário, acreditar seguir a regra seria o mesmo que seguir a regra." (Wittgenstein, IF, §202)

Ainda segundo Wittgenstein, não somos *guiados* por regras, agimos apenas em conformidade com elas. Não são a causa da compreensão, como também não o é qualquer outra entidade de natureza empírica ou transcendental. O que nos permite compreender as ações e palavras dos outros, podendo inclusive julgá-las, é um mesmo "chão" que compartilhamos. É a partir desse *background* comum que herdamos que somos capazes de distinguir entre o verdadeiro e o falso, e não através da comparação com objetos empíricos ou de intuições transcendentais.

Dado que seus enunciados têm o caráter de regras, a matemática não é *descritiva*, ela apenas nos dá as condições necessárias para a compreensão do sentido de certos fatos em determinados contextos. Por exemplo, no sistema de regras sintáticas da geometria euclidiana, dizer que "por dois pontos passa uma reta" é uma condição de sentido para qualquer afirmação empírica sobre essa reta, desde que estejamos no universo euclidiano. Assim, quando dizemos que "entre dois pontos pode-se traçar uma reta" significa que as afirmações que fazemos sobre a reta que passa por estes dois pontos têm sentido, sejam elas verdadeiras ou falsas. A partir dela, posso fazer afirmações descritivas – "esta reta tem 10 centímetros" ou "tracei uma reta vermelha pelos pontos A e B" etc. Essas são afirmações empíricas passíveis de verificação, mas que pressupõem o postulado da geometria euclidiana que lhes dá sentido: o de que por dois pontos é possível traçar uma reta. Enfim, a regra em si não tem significado, é apenas condição para o significado.

A natureza gramatical das proposições matemáticas elucida vários equívocos decorrentes das concepções idealista e realista e, em particular, dissolve as confusões a que conduzem os pressupostos das teorias psicogenéticas de Piaget. Uma vez que essas proposições não são descritivas, mas *normas* de descrição, não há *algo* (*a priori*) que as fundamente fora da linguagem, ou que a elas corresponda.

As proposições matemáticas não descrevem nem entidades abstratas, nem a realidade empírica; e tampouco refletem o funcionamento transcendental da mente. Seu estatuto apriorístico deve-se ao fato de serem normativas, *paradigmas* para a transformação de proposições. No entanto, a natureza gramatical das proposições matemáticas não impede que, em determinados contextos, tenham um uso empírico (descritivo) como, por exemplo, quando contamos objetos. Não há uma relação estática – "essencial" – entre o enunciado e os objetos a que ele se refere. A maneira como usamos nossas proposições é que lhes dá sentido. O que deve ficar claro "é que o critério para classificar uma proposição depende do seu uso, contexto e papel que ela exerce. Não é apenas a forma que conta. Se fôssemos considerar apenas a forma, então a sentença 'se você adiciona dois mais dois você obtêm quatro' torna-se ambígua; é o uso, o contexto e o papel que ela tem que determinará se a proposição é matemática ou empírica." (Gerrard, 1987, p. 94)

Assim, um mesmo enunciado matemático pode ter significados diferentes em função do contexto em que se apresenta. A proposição "2 + 2 = 4" pode tanto ter uso descritivo como normativo. Enquanto para uma criança "2 + 2 = 4" pode representar que seus dois dedos mais dois dedos dão quatro dedos de suas mãos, para um matemático este mesmo enunciado tem outro significado, visto dentro de outro contexto lingüístico como, por exemplo, o da teoria dos números. Enfim, não há uma essência por detrás de um enunciado – seu significado depende do contexto em que está inserido, seja o da cultura própria de um pesquisador matemático, seja o do ambiente em que vive a criança.

A natureza normativa do conhecimento matemático e a sua transmissão

Uma vez esclarecido em que sentido Wittgenstein considera o conhecimento matemático como sendo *a priori*, resta entender como, a partir de algumas definições e axiomas, a matemática "coincide" com o comportamento natural das coisas. Alegar que suas proposições são paradigmas para a transformação de proposições empíricas não é suficiente para explicar por quê se considera válida a expressão "2 + 2 = 4" e não outra expressão qualquer. Se a matemática é vista apenas como um conjunto de regras a serem seguidas, continuaremos com algumas questões "girando em falso". Se, por outro lado, for considerada como um jogo de linguagem – ou seja, uma atividade que entrelaça símbolos lingüísticos e técnicas compartilhadas por uma comunidade – entra-se num terreno situado entre o transcendental e o empírico.

Nossas escolhas não são aleatórias, mas baseadas em nossas formas de vida. Por exemplo, as escolhas feitas na geometria euclidiana têm raízes em formas de vida que utilizavam técnicas diversas de medição (como as dos antigos egípcios, empregadas para medir suas terras em épocas de enchentes e vazantes do rio Nilo). Isso não quer dizer que essa geometria tenha *fundamentos* empíricos, apenas que existem *razões* empíricas que levaram a uma determinada formulação geométrica, dentre várias outras razões (de natureza não empírica).

Talvez pudéssemos considerar algumas proposições da matemática de natureza sintética, na medida em que envolvem técnicas e procedimentos inerentes a esse determinado jogo de linguagem. Nem todas as suas proposições são evidentes da mesma forma que “um triângulo é uma figura”, ou seja, de que faz parte de um triângulo ser uma figura. Somar, por exemplo, 254 + 389, exige uma técnica, seja a do algoritmo da “conta em pé”, seja utilizando um ábaco, seja contando. Essas técnicas foram desenvolvidas socialmente ao longo dos tempos, e o conceito de adição está relacionado com elas. Este conceito é “cristalizado” como norma e independe da experiência – torna-se uma *proposição necessária*, *a priori*. E é esse caráter necessário e apriorístico das proposições matemáticas que as distingue de outras proposições de nossa linguagem. O que não quer dizer que não tenham raízes no empírico, ou que não possam ter um uso descritivo. Segundo Wittgenstein, é essencial à matemática que signos sejam também empregados *à paisana*, é o uso fora da matemática e portanto, o *significado* dos signos, que transforma o jogo de signos em matemática. Essa peculiaridade de suas proposições – semelhantes, por um lado, às regras de um jogo, as quais são autônomas e independentes do empírico, e, por outro, com aplicações no mundo empírico, possibilitando o trânsito de uma proposição para a outra – caracteriza o conhecimento matemático como um jogo de linguagem totalmente distinto dos jogos das ciências empíricas e das ciências cognitivas.

Enfim, são várias as funções de nossos enunciados lingüísticos inseridos em distintos jogos de linguagem. As contradições e paradoxos a que somos conduzidos devem-se a nossas próprias confusões conceituais ao operarmos com nossa linguagem, e não ao fato de ela ser um reflexo da natureza das coisas. Das concepções contemporâneas sobre a natureza do conhecimento matemático Wittgenstein mantém apenas algumas de suas teses: a matemática não é refutável pela experiência (como já advogava o logicismo), baseia-se em uma atividade humana (como defendia o intuicionismo) e emprega signos escritos e sonoros (formalismo). No entanto, estes signos não são vazios, são empregados em contextos específicos e em atividades regradas, onde estas regras são de natureza *convencional*. Conseqüentemente, no contexto escolar, um aluno não tem como adivinhá-las a partir da experiência empírica ou através de uma intuição matemática. Assim, é fundamental que o professor tenha clareza da especificidade das proposições matemáticas, pois, embora pareçam por vezes estar descrevendo algum fato empírico ou pareçam decorrer de processos mentais, elas têm essencialmente um caráter normativo. Ao não levar em consideração essa diferença, o educador estará sujeito a diversos equívocos em suas práticas pedagógicas.

Bibliografia

Barker, S.F. *Filosofia da Matemática*. Zahar, Rio de Janeiro, 1969.

Gerrard S.. *Wittgenstein in transition: the philosophy of mathematics.* Tese de doutorado na Universidade de Chicago, Illinois, 1987.

Gottschalk, C. M. C. *Uma reflexão filosófica sobre a matemática nos PCN*. Tese de doutorado na Universidade de São Paulo, São Paulo, 2002.

Moreno, A. R. *Wittgenstein através das imagens*. Campinas: editora da Unicamp, 1995.

Wittgenstein, L. *Observaciones sobre los fundamentos de la matematica*. Madrid: Alianza Editorial, 1987.

______________ *Investigações Filosóficas* em sua edição bilíngüe (Philosophical Investigations. Trad. G. E. M. Anscombe. Oxford: Blackwell Publishers, 1997)

Recebido para publicação em 12-01-14; aceito em 15-02-14