"Um certo teorema de Platão": Nicômaco de Gerasa sobre a proporção entre quadrados e cubos em *Tim*. 31b-32c

Jonathas Ramos de Castro[1]

Resumo: Este artigo expõe, à luz da *Introdução à Aritmética* de Nicômaco de Gerasa, a teoria da proporção, enfatizando o caso particular da proporção geométrica entre quadrados e cubos, no qual Platão encontrou um recurso para resolver uma aporia deixada por Empédocles.
Palavras Chave: Platão; Nicômaco; proporção; filosofia; matemática.

Abstract: This paper exposes the theory of proportion according to Nicomachus of Gerasa' *Introduction to Arithmetics*, emphasizing the particular case of geometrical proportion between squares and cubes, in with Plato has found a resource to solve an aporia left behind by Empedocles.
Keywords: Plato; Nicomachus; proportion; philosophy; mathematics.

In memoriam O.G.C.
In memoriam G.F.B.R.
R.I.P.

Introdução

A proporção – ou mais precisamente a teoria dos termos médios ou simplesmente médias, uma dos quais, a média geométrica, é chamada proporção – foi objeto de interesse da matemática e da filosofia gregas desde muito cedo. Já no século V a.C., o matemático Hipócrates de Quíos propôs uma solução para o problema da duplicação do cubo pela proporção[2]. Entre os filósofos, mencione-se Tales de Mileto e a descoberta da altura da pirâmide pela altura de sua sombra projetada comparada com a altura da sombra projetada por outro corpo[3]. Certamente a Platão, praticante tanto da matemática quanto da filosofia[4], a proporção tinha de despertar interesse.

---

[1] Doutor e Mestre em Filosofia e Teoria Geral do Direito pela Faculdade de Direito da Universidade de São Paulo (USP). Bacharel em Direito pela Faculdade de Direito da Universidade Presbiteriana Mackenzie (SP). Contato: jonathas.r.castro@hotmail.com.

[2] "Hipócrates descobriu que a duplicação do cubo era equivalente a encontrar duas médias proporcionais em proporção contínua entre duas retas dadas" (HEATH, 1981, p. 246). Sejam *a*, *2a* duas retas, uma o dobro da outra, e *x*, *y* dois termos médios, fazendo-se $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$ segue-se que (i) $x^2 = ay \rightarrow y = \frac{x^2}{a}$, (ii) $y^2 = 2ax \rightarrow \left(\frac{x^2}{a}\right)^2 = 2ax \rightarrow 2a^3 = x^3$, isto é, o cubo de lado a é teoricamente o dobro do cubo de lado x.

[3] "Tales não poderia ter deixado de observar que, quando a sombra de um objeto particular é igual à sua altura, a mesma relação vale para todos os outros objetos que projetam sombra" (HEATH, 1981, p. 129). A altura da pirâmide pode ser encontrada mesmo quando a sombra do objeto, por exemplo um bastão fincado verticalmente no chão, for diferente de sua altura: sejam *a*, *a'* as alturas do bastão e de sua sombra e *b*, *b'* as alturas da pirâmide e sua sombra,

Algumas vezes Platão denuncia seu interesse pela proporção de forma bastante simples; um exemplo é o raciocínio de Pausânias, no *Banquete*, para provar que existem dois Eros[5]. Outras vezes, porém, ele o faz de forma incrivelmente complexa; é o caso do *Timeu*.

No *Timeu* encontra-se proporção em todo lugar. O objeto do presente artigo será uma delas, a proporção entre dois quadrados e dois cubos, que Platão emprega, a uma só vez, para descrever a criação do corpo do mundo pelo deus-geômetra e para resolver uma aporia deixada por Empédocles de Agrigento (Capítulo 1). Essa proporção foi destacada posteriormente por Nicômaco de Gerasa, neo-pitagórico do séc. I, que no segundo livro de sua *Introdução à Aritmética* a ela se referiu impropriamente[6] como "um certo teorema de Platão". O artigo que ora se inicia, ocupando-se do seu objeto, dará ênfase à exposição de Nicômaco – sua relativa dependência às Definições 18 e 19 do Livro VIII dos *Elementos* de Euclides, seus exemplos propostos na *Introdução* e suas limitações apontadas por Proclo no Livro III dos *Comentários ao Timeu* –, não sem antes se permitir, a título de contextualização, um excurso pelo estado da teoria da proporção grega em geral e sua apresentação na *Introdução* em particular (Capítulos 2 e 3). Este trabalho terminará com algumas considerações gerais sobre a filosofia e a matemática como partes da mesma "experiência concreta e vivida"[7] – o chamado "exercício da morte" – em Platão.

1. Uma resposta a Empédocles

É desnecessário dizer que Platão "pitagoriza" no *Timeu*[8]; mas é igualmente certo que, a propósito de alguns assuntos importantes, o diálogo também veicula uma resposta de Platão ao sistema de Empédocles, resposta que, ao mesmo tempo, honra e supera o mestre de Agrigento. Os detalhes

---

então $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$, sendo a altura da pirâmide (b) dada por $\frac{ab'}{a'}$. Tem-se o que se convencionou chamar Teorema de Tales ou da Interseção.

[4] Embora se possa admitir que as contribuições de Platão tenham sido maiores para filosofia, a filosofia da matemática inclusive, do que para a ciência matemática em sentido estrito. Sobre o assunto, ver p.ex. BICUDO, 2019, p. 79-81 e 87-90.

[5] "Não existe Afrodite sem Eros", ele inicia dizendo (*Banq.* 180d). Mas existem duas Afrodites; logo, devem existir dois Eros. Simplificando:

$A \rightarrow E$
$2A$
$2A \rightarrow 2E$

[6] Impropriamente porque a constatação de que entre dois quadrados existe uma média proporcional e entre dois cubos existem duas médias proporcionais já era de algum modo suposta na solução de Hipócrates de Quíos ao problema da duplicação do cubo (n. 2 *supra*): duplicar o cubo (i.e., encontrar um segundo cubo com o dobro do tamanho do primeiro) envolve encontrar dois termos médios entre duas linhas, assim como duplicar o quadrado envolve encontrar um termo médio entre duas linhas (HEATH, 1981, p. 201).

[7] HADOT, 1995, p. 120.

[8] "É bem conhecido que a matemática do *Timeu* de Platão é essencialmente pitagórica" (HEATH, 1956, p. 294).

parecem confirmar essa afirmação, a começar já do ponto de partida: a teoria dos "elementos".

A rigor, Empédocles não usa o termo "elemento" (στοιχεῖον), e as coisas que ele poderia ter chamado de "elementos", se conhecesse a palavra, não são, em Platão, "elementos"[9].

Aristóteles assim sintetiza a doutrina de Empédocles: "Empédocles [afirmou como maior princípio dos corpos simples] a tétrade"[10], isto é, o conjunto formado por água, ar, fogo e terra[11]. Aristóteles devia ter em mente um texto de Empédocles como o seguinte, conservado no Fragmento 17 Burnet:

> Um dia, cresceram de muitos, em conjunto, para serem um só; noutro, fragmentaram-se para serem muitos ao invés de um – Fogo e Água e Terra, e a majestosa altura do Ar[12].

A linguagem é caracteristicamente obscura[13], mas está claro que esses princípios são στοιχεῖα, embora jamais sejam descritos com essa palavra nos fragmentos (para Empédocles, eles são "raízes dos seres", cf. Fr. 6): todos os seres derivam de ("cresceram de muitos para serem um só") e se dissolvem em ("fragmentaram-se para serem muitos ao invés de um") fogo, água, terra e ar.

[9] Entenda-se por "elemento" como quer Aristóteles (*Met.*, A 3 983^b 5-10): "Aquilo de que todos os seres são constituídos e aquilo de que originariamente derivam e aquilo em que por último se dissolvem é elemento [στοιχεῖον] e princípio dos seres, na medida em que é uma realidade que permanece idêntica mesmo na mudança de suas afecções". Com essa definição em mente, Diels (DIELS, 1899, p. 14) observa: "Mas nenhum dos físicos, os quais fizeram dos posteriormente assim chamados elementos – seja um só ou quatro ou cinco ao todo – o fundamento da sua especulação, serviram-se da palavra στοιχεῖον". Um pouco adiante (DIELS, 1899, p. 15), especificamente sobre Empédocles, ele diz: "É verdade que o próprio Empédocles fixou primeiro a tétrade dos elementos, de acordo com a predileção pitagórica pela sagrada Tetraktys, e, o que é mais importante, expressou em suas quatro 'raízes' do ser a exigência eleata do princípio eterno e imutável (intermediando entre os átomos infinitos de Leucipo e o um imóvel de Parmênides), e com isso construiu o conceito dominante de elemento, mas ele ainda não conhecia o nome usual ulterior para isso, στοιχεῖα". Já sobre Platão, afirma (DIELS, 1899, p. 20-21): "Por outro lado, ele mesmo [Platão] aqui [Tim. 48b] chama de στοιχεῖα as figuras que restam subjacentes aos assim chamados elementos [o triângulo retângulo isósceles e o triângulo retângulo escaleno, nos quais os "assim chamados elementos" podem ser decompostos]. [...] Consequentemente, ele utiliza aqui para designação dos quatro elementos usuais a expressão γένη". Ainda sobre Platão pode-se acrescentar a observação de Cornford (CORNFORD, 2014, p. 162): "Platão a uma só vez nega a elas [i.e., às quatro raízes de Empédocles] a condição de elemento e promete 'explicar a geração delas' a partir de começos anteriores e mais simples".

[10] Aristóteles, *Met.*, A 984^a 5.

[11] A água como "elemento" fora proposta por Tales, o ar por Anaxímenes e o fogo por Heráclito. Quanto à terra, Reale (REALE, 2012, p. 134) diz que ele a tomou "em certo sentido" de Xenófanes, enquanto Aristóteles (*Met.*, A 3 984^a 7) se limita a dizer que ele a "acrescentou" aos outros três.

[12] Empédocles, Fr. 17, 15-20 Burnet.

[13] Aristóteles censura Empédocles por "seu modo confuso de se exprimir". *Met.*, A 4 985^a 5.

Não está claro, porém, por que elas têm necessariamente de ser em número de quatro[14]. A essa aporia Platão oferece uma resposta a seu modo – isto é, “pitagorizante”.

Do “discurso provável” apresentado por Timeu depreende-se que fogo etc. são nomes de puras qualidades ou potências[15] às quais o deus, “o que faz ordem” (ὁ ποιῶν κόσμους, 31b), atribuiu corpos geométricos regulares[16] formados a partir de dois triângulos retângulos[17]. Quando, em seguida, se tratou de criar o corpo do mundo, que na mente do deus deveria ser uma

---

[14] O *numerus clausus* das raízes é enfatizado em vários fragmentos (Frs. 17, 21, 26 Burnet), sem qualquer dedução, o que dá razão a Cornford, quando diz: “Empédocles tomou os quatro elementos como um fato dado” (CORNFORD, 2014, p. 45). Conjecturas existem. Como visto, Diels (DIELS, 1899, p. 15 *supra*) sugere uma explicação pela filiação ao pitagorismo. Burnet (BURNET, 2006, p. 238-239) presume o seguinte: “As ‘quatro raízes’ de todas as coisas [...] parecem ter sido algo a que se chegou fazendo de cada um dos ‘contrários’ tradicionais – quente e frio, úmido e seco – uma *coisa*, que é real no sentido pleno e parmenidiano da palavra”. Reale (REALE, 2012, p. 135) fornece duas sugestões: “Ele [Empédocles] pode ter sido influenciado pela tétrade pitagórica, isto é, pela convicção da natureza privilegiada do número quatro: mas foi certamente determinante a contestação da experiência que parece atestar justamente que tudo deriva do ar, da água, da terra e do fogo [segue-se citação do Fr. 21 Burnet]”. A primeira sugestão de Reale claramente acompanha Diels; a segunda suposição está próxima da proposta de Burnet. Ambas são razoáveis, mas, se de fato Empédocles as tivesse em mente, não chegam a ser uma explicação suficiente do problema. Com efeito, seja por influência da tétrade pitagórica seja pela observação da experiência, permanece o fato de que Empédocles tomou os quatro elementos como um dado, sem necessidade de argumento.

[15] Ao contrário do que teria feito Empédocles (segundo a conjectura de Burnet, nota *supra*), Timeu recusa ao fogo etc. qualquer realidade permanente, o que naturalmente se reflete na linguagem: “Sempre que observamos”, ele diz, “uma coisa mudando perpetuamente – fogo, por exemplo – em todo caso devemos falar do fogo não como ‘isso’ mas como ‘o que tem tal e qual qualidade’ [ποιότης]” (*Tim.*, 49d). Em suma, as palavras “fogo” etc. não indicam coisas, mas qualidades que, originalmente – isto é, “antes da geração do cosmo” (*Tim.*, 48b) – apresentavam-se abstraídas de qualquer substância permanente, aparecendo e desaparecendo sobre o receptáculo, “sem qualquer proporção ou medida” (*Tim.*, 53b), projetadas ali pelas Formas correspondentes (o Fogo em si etc.), cf. *Tim.*, 49e-52d. Essas qualidades só receberão uma forma definida após a intervenção do deus (*Tim.*, 53b). Cornford observa (CORNFORD, 2014, p. 180-181, v. Burnet nota *supra*) que o pensamento pré-socrático identificava “quente”, “frio” etc. com coisas (χρήματα), cada qual dotada de um poder (δύναμις) característico. O termo ποιότης, introduzido em *Teet.*, 182a, no *Timeu* tem como principal objetivo romper essa identificação: ποιότης é somente δύναμις, liberta da χρῆμα. “Platão está afirmando agora que ‘fogo é propriamente apenas um nome para uma certa combinação de qualidades ou ‘poderes’, que aparecem e desaparecem e são sempre variáveis”.

[16] O cubo foi atribuído à terra, o tetraedro ao fogo, o octaedro ao ar e o icosaedro à agua (*Tim.*, 55d-56c). Os quatro sólidos foram construídos hipoteticamente pela primeira vez por Teeteto na Academia (CORNFORD, 2014, p. 210) e figuram no Livro XIII dos *Elementos* de Euclides.

[17] “Em primeiro lugar, então, é claramente óbvio a qualquer um que fogo, terra, água e ar são corpos; e todo corpo tem profundidade. Profundidade, além disso, deve ser limitada por superfície; e toda superfície retilínea é composta de triângulos. Ora, todos os triângulos derivam de dois, cada um tendo um ângulo reto e os demais ângulos agudos” (*Tim.*, 53c-d). Essas definições, mais tarde, figurarão nos Livros I e XIII dos *Elementos* de Euclides. Observe-se que o triângulo retângulo isósceles e o triângulo retângulo escaleno, os dois triângulos dos quais todos os triângulos – consequentemente, todos os corpos – derivam, são “o primeiro começo do fogo e dos outros corpos” (*Tim.*, 53d): como foi dito, água e ar, fogo e terra não são, para Platão, o mesmo que para Empédocles, isto é, “elementos” do mundo visível, realidades que permanecem idênticas mesmo no devir, conforme a definição de Aristóteles *supra*.

unidade[18] “visível e tangível” (31b), o problema consistiu em encontrar o vínculo (δεσμός) entre os dois corpos relacionados às potências da visão e do tato – fogo e terra – capaz de torná-los uma unidade perfeita. Timeu encontra a solução na teoria dos termos médios, ou médias, conhecida desde os pitagóricos[19]: o deus uniu fogo e terra segundo a proporção (ἀναλογία), isto é, a média geométrica[20], pois a média geométrica é o vínculo que faz de si mesmo e dos termos vinculados uma unidade (31c). Mas, a rigor, a resposta ainda não está completa. Quantas médias geométricas devem ser usadas para vincular fogo e terra? Entre dois quadrados uma média é suficiente para formar a proporção, mas “sólidos são sempre conjugados, não por uma média, mas por duas” (32b). Como fogo e terra são sólidos, duas médias foram necessárias, e então Timeu conta que o deus acrescentou água e ar entre fogo e terra para obter a unidade desejada. Chega-se, assim, ao total de quatro “elementos”, dessa vez justificado por um argumento.

Interessa notar que o cerne da resposta de Platão a Empédocles é o cálculo das médias geométricas entre números quadrados e números cúbicos[21]. A esse cálculo Nicômaco de Gerasa se refere como “um certo teorema de Platão”. A referência é feita no contexto de uma revisão da teoria da proporção, contida no final do Livro II da *Introdução à Aritmética*; examinaremos agora essa revisão, começando pelo estado da teoria da proporção grega.

---

[18] Imediatamente antes de tratar do corpo do mundo Timeu havia defendido, contra a tese atomista da pluralidade infinita de mundos visíveis, a tese da unidade do mundo visível (*Tim.*, 31a-b), que se exprime como unidade externa e unidade interna (CORNFORD, 2014, p. 43), sendo que a unidade externa é garantida pela continência (o mundo visível contém todo o visível, 30c-d) e a unidade interna (entre seus elementos constituintes) é garantida pela proporção.

[19] HEATH, 1981, p. 85.

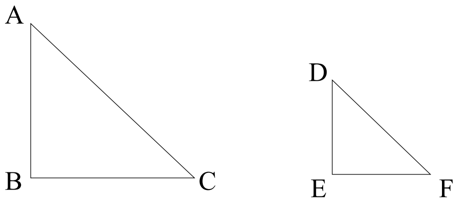
[20] *Tim.*, 31c. Na Antiguidade, reservou-se de início o nome “proporção” para a média geométrica propriamente, embora muitos autores, entre eles Nicômaco de Gerasa, tenham ampliado o uso do termo (HEATH, 1956, p. 292). Que a proporção preserva a unidade na multiplicidade pode se depreender com o seguinte exemplo: na série finita 64, 32, 16, 8, 4, 2, 1 os termos estão em proporção, podendo-se então grafar $\frac{64}{32} = \frac{32}{16} = \frac{16}{8} = \frac{8}{4} = \frac{4}{2} = \frac{2}{1}$; note-se que todas as frações assim formadas se reduzem ao mesmo número 2. Precisamente como Proclo (*Com. Tim.* III, 18, 28-29) afirmou: a proporção é o vínculo “que preserva o Um no avanço para a pluralidade”.

[21] Em *Tim.*, 31c-32a, Platão usa as palavras ὄγκος e δύναμις, o que provocou discussão sobre se se referia a planos e sólidos (números do tipo "$a \times b$” e "$a \times b \times c$" respectivamente) ou a quadrados e cubos apenas (que são planos e sólidos com lados iguais, i.e., números do tipo a^2 e b^3 respectivamente, cf. Euclides, *Elem.* VII, Def. 18 e 19). Observando que o cálculo não é verdadeiro para planos e sólidos, Heath e Cornford defendem que Platão se refere na verdade a quadrados e cubos (HEATH, 1956, p. 294; HEATH, 1981, p. 89; CORNFORD, 2014, p. 46-47).

2. Excurso

2.1. A teoria da proporção, dos antigos pitagóricos a Eudoxo de Cnido

Proclo atribui a Pitágoras a descoberta da proporção[22]. Textualmente, a evidência da prática da proporção entre os pitagóricos é tardia; o texto mais antigo é um fragmento de Arquitas, contemporâneo de Platão, preservado por Porfírio, em que se distinguem "as três médias na música: primeiro a aritmética, depois a geométrica e em terceiro a sub-contrária, a assim chamada harmônica"[23]. Mas, apesar da escassez de evidência, não se disputa que Pitágoras tenha empregado proporções; além de seus experimentos com as consonâncias musicais, ele devia ter familiaridade com semelhança entre figuras, "o que implica alguma teoria da proporção"[24]. Com efeito, para que duas figuras sejam semelhantes basta que seus lados homólogos estejam em proporção geométrica disjunta. V.g., sejam os triângulos ABC e DEF a seguir:



Se $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD} = \frac{m}{n}$, os triângulos são semelhantes.

O exemplo permite visualizar uma característica definidora dessa teoria da proporção: a comensurabilidade. Supõe-se que os lados dos triângulos sejam comensuráveis entre si, isto é, que seja possível exprimir as suas relações por números racionais positivos ($\frac{m}{n}$, a hoje chamada constante de proporcionalidade k). Entende-se por que a descoberta da incomensurabilidade, atribuída ao pitagórico Hipaso de Metaponto no século V a.C., significou a crise dessa teoria e, no limite, o abandono da proporção pelos matemáticos[25], como sendo uma teoria limitada e inconclusiva.

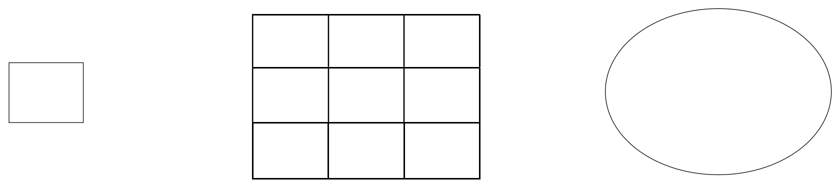
[22] *Com. Euc.*, Prólogo, Parte I, p. 65. Sobre as dificuldades dessa passagem, ver HEATH, 1981, p. 84.

[23] THOMAS, 1957, p. 113.

[24] HEATH, 1981, p. 85.

[25] Em notação moderna, os pitagóricos acreditavam que toda a matemática (portanto, para eles, todo o mundo) era exprimível em $\mathbb{Q}^*{+}$, isto é, o conjunto dos números racionais (m ou $\frac{m}{n}$, sendo m, n números inteiros) positivos sem o zero. Hipaso teria descoberto relações inexprimíveis em $\mathbb{Q}^*{+}$, mas apenas em um subconjunto do conjunto mais amplo $\mathbb{R}$ (= números reais), a saber, os números irracionais. Um número irracional é um número que não pode ser obtido pela divisão de dois números inteiros; daí a definição de incomensurabilidade: "Duas quantidades, como a diagonal e o lado do quadrado, são incomensuráveis quando sua razão não é igual à de algum número (inteiro) para um outro número (inteiro)" (BOYER, MERZBACH, 2018, p. 79). Sobre essa descoberta, ver C.B. Boyer e U.C. Merzbach: "Tratava-se da descoberta que, na própria geometria, os inteiros e suas razões eram insuficientes para

Era preciso reinventar a teoria da proporção, o que ficou a cargo de Eudoxo de Cnido, no séc. IV. O principal registro da teoria eudoxiana da proporção é, segundo a tradição, o Livro V dos *Elementos* de Euclides, escrito no séc. III. Aceitando a tradição, ao ler as quatro primeiras definições do Livro V vemos que Eudoxo se referia a magnitudes (μεγέθη), assim entendidas grandezas de todos os tipos (números, retas, áreas, volumes, tempos etc.[26]) às quais atribuía um atributo em especial, o tamanho (πηλικότης), e definia a razão (λόγος) entre duas magnitudes quando uma, ao ser multiplicada, excede a outra em tamanho, e reciprocamente; chamava a magnitude menor de parte (μέρος) da maior e a maior de múltiplo (πολλαπλάσιος) da menor, dizendo ainda que a parte mede o múltiplo e o múltiplo é medido pela parte (V, Defs. 1 a 4[27]). Já essas definições tornaram possível comparar objetos de outro modo incomparáveis, como um quadrado e um círculo: dadas duas magnitudes, um quadrado A e um círculo B, sendo A < B, multiplica-se A até que exceda B em tamanho, formando uma terceira magnitude, o quadrado 9A, múltiplo de A:



descrever mesmo propriedades básicas simples. Não bastam, por exemplo, para comparar a diagonal de um quadrado ou de um cubo ou de um pentágono como o seu lado. Os segmentos são incomensuráveis, não importa quão pequena se escolha a unidade de medida" (BOYER, MERZBACH, 2018, p. 70). Essa última frase de Boyer e Merzbach pode ser entendida à luz de Heath (HEATH, 1981, p. 90), que, comentando uma passagem de Proclo, assim afirma: "Onde há divisão *ad infinitum*, ali há também o irracional". Boyer e Merzbach ilustram com exemplos essa divisão *ad infinitum*, um deles o pentágono: quando se traçam as cinco diagonais de um dado pentágono regular, obtém-se um pentágono regular menor, cujas cinco diagonais formam um terceiro pentágono ainda menor. "Esse processo pode ser continuado indefinidamente, resultando em pentágonos tão pequenos quanto se queira e levando à conclusão de que a razão da diagonal para o lado em um pentágono regular não é racional" (BOYER, MERZBACH, 2018, p. 70). Sobre o impacto dessa descoberta sobre a matemática grega, escreve Heath (HEATH, 1981, p. 326): "[...] A geometria ainda dependia da teoria pitagórica da proporção, isto é, a teoria numérica que era, é claro, aplicável apenas a comensuráveis. A descoberta dos incomensuráveis deve ter causado o que Tannery descreveu como 'un véritable scandale logique' [um verdadeiro escândalo lógico] na geometria, na medida em que tornou inconclusivas todas as provas que dependiam da antiga teoria da proporção. Um efeito seria naturalmente que os geômetras evitassem o uso de proporções o tanto quanto possível; eles usariam outros métodos sempre que pudessem".

[26] HEATH, 1981, p. 384.

[27] "Uma magnitude é uma parte de uma magnitude, a penor da maior, quando ela mede a maior" (Def. 1); "A [magnitude] maior é um múltiplo da menor quando é medida pela menor" (Def. 2); "Uma razão é um tipo de relação em respeito ao tamanho entre duas magnitudes do mesmo tipo" (Def. 3); "Diz-se que magnitudes têm uma razão uma com a outra quando são capazes, ao serem multiplicadas, de exceder uma a outra" (Def. 4).

Pode-se então definir a razão A : B = 9A[28].

A igualdade de duas razões define, teria ensinado Eudoxo, a proporção. Nas definições quinta e sexta do Livro V[29], são postas quatro magnitudes, A, B, C, D, e informa-se: (i) as magnitudes formam duas razões, $\frac{A}{B}$ e $\frac{C}{D}$; (ii) os numeradores A, C e os denominadores B, D têm múltiplos iguais (equimúltiplos), i.e.: $\frac{mA}{nB}$ e $\frac{mC}{nD}$ (m, n sendo números inteiros). É dito que as razões entre as magnitudes são iguais, $\frac{mA}{nB} = \frac{mC}{nD}$, se

Sempre que	$mA > nB$	então	$mC > nD$
	$mA = nB$		$mC = nD$
	$mA < nB$		$mC < nD$

Descobrindo ser possível estabelecer proporções comparando os tamanhos das magnitudes (>, =, <), ainda que a razão entre elas não seja exprimível por números racionais positivos (m ou $\frac{m}{n}$), Eudoxo conseguiu resolver a crise provocada pela incomensurabilidade.

A título de exemplo: a semelhança entre os triângulos ABC e DEF *supra* foi dada, à maneira pitagórica, por $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD} = \frac{m}{n} \mid \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}^*{+}$. Para que os triângulos sejam semelhantes, é necessário que a razão entre seus lados possa ser expressa em $\frac{m}{n}$ (ou simplesmente k). Atribuam-se aos lados de ABC e DEF os seguintes valores: AB = 15, BC = 21, CA = 18, DE = 10, EF = 14, FD = 12. Esses triângulos são semelhantes, pois

$$\frac{15}{10} = \frac{21}{14} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$$

Mas, caso não se queira provar a semelhança por essa proporção, porque a ortodoxia do número racional $\frac{m}{n}$ foi abalada pela heresia da

[28] Eudoxo teria feito a restrição de que as magnitudes comparadas devem ser semelhantes (Def. 3): v.g., duas superfícies (um quadrado e um círculo), mas não uma superfície e uma reta, pois as duas magnitudes devem ser capazes de exceder uma a outra quando multiplicadas (no exemplo acima, A pode exceder B tanto quanto B pode exceder A), mas uma reta, por exemplo, não pode exceder uma superfície (dado que a reta não tem área).

[29] "Diz-se que magnitudes estão na mesma razão, a primeira para a segunda e a terceira para a quarta, quando, tomando-se quaisquer equimúltiplos da primeira e da terceira, e quaisquer equimúltiplos da segunda e da quarat, os primeiros equimúltiplos são ambos maiores, ambos iguais ou ambos menores do que os últimos equimúltiplos respectivamente, tomados na ordem correspondente" (Def. 5); "Sejam chamadas proporcionais as magnitudes que têm a mesma razão" (Def. 6).

incomensurabilidade, não há motivo para descartar a teoria da proporção *tout court*; basta comparar o tamanho dos dois triângulos, à maneira eudoxiana:

$$\frac{mAB}{nDE} = \frac{mBC}{nEF} = \frac{mCA}{nFD} \equiv \text{(i) } mAB > nDE \rightarrow mBC > nEF\text{, (ii) } mBC > nEF \rightarrow mCA > nFD$$

Substituindo-se pelos mesmos valores acima, chega-se às seguintes proporções verdadeiras:

(i) $15 > 10 \rightarrow 21 > 14$

(ii) $21 > 14 \rightarrow 18 > 12$

Ou seja, a semelhança entre os dois triângulos ABC e DEF foi provada por uma proporção sem recorrer a $\frac{m}{n}$.

2.2. A teoria da proporção em Nicômaco de Gerasa

Como já foi observado, Nicômaco usa o termo ἀναλογία de uma maneira que distoa do tradicional: enquanto o próprio Platão parece preferir reservá-lo à média geométrica[30], Nicômaco o emprega indistintamente a todas as médias[31]. Ele pode fazer isso, visto as suas premissas.

Para Nicômaco, proporção em sentido estrito é "a combinação de duas ou mais razões [λόγων] em uma mesma". Uma razão, ele diz, é "a relação de dois termos [ὅρων] um com o outro". Como exemplo, Nicômaco observa que 1 : 2 e 2 : 4 são duas razões (o segundo termo é o dobro do primeiro) as quais, se combinadas em 1 : 2 = 2 : 4, formam uma proporção, pois os três termos estão em uma mesma razão um com o outro.

Nicômaco subdive a proporção assim definida em duas espécies (II, 21.5-6; II, 23.2; II, 23.3): (i) proporção contínua (συνημμένη); (ii) proporção disjunta (διεζευγμένη). (i) Na proporção contínua, "o mesmo termo, único e imutável [b], é comparado àqueles em cada lado seu, ao maior [a] como consequente e ao menor [c] como antecedente" (II, 21.5): a : b = b : c, sendo a > b > c. (ii) Na proporção disjunta, "um termo [c] responde ao termo menor [d], e se torna seu antecedente e termo maior, e outro [b], não o mesmo,

[30] Compare-se, por exemplo, os cálculos em *Tim.*, 31b-32a (a criação do corpo do mundo), em que se utiliza da média geométrica, e *Tim.*, 36a-c (a criação da alma do mundo), em que se serve das médias harmônica e aritmética. Somente no primeiro ocorre ἀναλογία, "proporção"; no segundo, Platão se refere genericamente a μεσότης, "média". Segue, portanto, o uso tradicional, para o qual a proporção é uma média, mas a recíproca não é sempre verdadeira.

[31] Embora admita, como se verá, que a proporção geométrica é "a única [proporção] no sentido estrito da palavra".

assume o lugar de consequente e termo menor com relação ao maior [a]" (II, 21.6): a : b = c : d, sendo a > b > c > d.

Nicômaco ainda distingue entre proporção, contínua ou disjunta, (i) segundo a quantidade (κατὰ τὸ ποσὸν) e (ii) segundo a qualidade (κατὰ τὸ ποιὸν). Assim, (i) termos estão em proporção quanto à quantidade quando participam "de quantidade igual em suas diferenças" (II, 22.2; II, 23.4). Por exemplo (II, 21.5; II, 21.6), 3, 2, 1 é uma proporção contínua quanto à quantidade, e 4, 3, 2, 1 é uma proporção disjunta quanto à quantidade, pois se observa a mesma quantidade (1) na diferença entre os termos. (ii) Por outro lado, termos estão em proporção quanto à qualidade quando participam "de qualidade igual" (II, 23.4). Essa expressão não é precisa: em algumas passagens (p.ex. II, 23.1 e II, 23.4) ela claramente equivale a "mesma razão" (λόγος ὁ αὐτὸς) e em uma passagem específica "qualidade" e "razão" são indiscerníveis (II, 24.1, onde se fala de diferença λόγου ποιότητι, "pela qualidade da razão"). Nesse caso, 4, 2, 1 é uma proporção contínua quanto à qualidade, e 8, 4, 2, 1 é uma proporção disjunta quanto à qualidade, pois se observa a mesma qualidade (a mesma razão) entre os termos ($\frac{4}{2} = \frac{2}{1}$ etc.)[32].

Pode ser que a generalidade dessas definições iniciais tenha conduzido Nicômaco a empregar, com alguma naturalidade, o termo ἀναλογία a todas as médias. De todo modo, fixadas essas premissas Nicômaco passa a tratar das proporções "que são reconhecidas por todos os antigos" (II, 22.1): a aritmética, a geométrica e a harmônica.

A ordem importa: a primeira proporção deve ser a aritmética, isto é, "aquela forma de proporção que pela quantidade reconcilia e reune a comparação de termos, que é uma igualdade quantitativa quanto à diferença

---

[32] Destaquem-se algumas semelhanças e diferenças entre essas definições iniciais de Nicômaco e as apresentadas no Livro V dos *Elementos* de Euclides. Como visto, em Euclides (ou em Eudoxo) magnitudes são ditas estarem "em proporção" (ἀνὰ λόγον) quando apresentem "a mesma razão" (τὸν αὐτὸν λόγον) (Def. 6) e razão é dita ser relação (λόγος ἐστὶ... σχέσις) (Def. 3). Até esse ponto Nicômaco parece estar de acordo. Entretanto, note-se: (i) Em primeiro lugar, Euclides-Eudoxo se refere a relação entre "magnitudes" (μεγέθη), enquanto Nicômaco fala em "termos" (ὅροι). Mais do que uma diferença entre palavras, trata-se de uma diferença entre tradições. Nicômaco, apesar de escrever após Euclides, é pitagórico de tradição. Como visto, os pitagóricos desenvolveram uma teoria da proporção assentada no pressuposto da comensurabilidade dos números inteiros, teoria que se revelou insuficiente, é claro, após a descoberta da incomensurabilidade. Lendo o Livro II da *Introdução*, tem-se a impressão de que, mesmo após Eudoxo, Nicômaco permanece escrevendo conforme a antiga teoria pitagórica – seja porque, para os gregos, a incomensurabilidade era considerada um problema geométrico (HEATH, 1981, p. 90), e Nicômaco escreve um livro sobre aritmética; seja porque Nicômaco, como pitagórico fiel, devoto à ortodoxia dos números racionais, não ousaria tratar da heresia dos incomensuráveis a um público amplo; (ii) Em segundo lugar, como já lembrado, Euclides (Def. 3) se refere a relação entre magnitudes semelhantes (p.ex., duas superfícies) "segundo o tamanho" (κατὰ πηλικότητά), sendo πηλικότης o atributo de uma magnitude (HEATH, 1956, p. 117); Nicômaco, talvez por lhe faltar o mesmo conceito técnico de magnitude, tem de se referir a relações entre números segundo as categorias aristotélicas da quantidade e da qualidade.

dos vários termos um em relação ao outro" (II, 22.2). Nicômaco apresenta duas razões para isso: (i) Na natureza, a proporção aritmética vem antes do resto: "Na série natural de números simples, começando com 1, com nenhum termo ignorado ou omitido [1, 2, 3...], a definição dessa proporção apenas é preservada" (II, 22.3); (ii) Coerente com o que dissera no livro anterior (I, 4) sobre a anterioridade da aritmética em relação às outras ciências matemáticas: "Ela [a aritmética] é antecedente a todas as outras, porque ela as abole junto consigo, mas não é abolida junto com elas, e porque ela é implicada por elas, mas não as implica" (II, 22.3).

Assim se enuncia a definição dessa proporção: "Sempre que três ou mais termos são colocados em sucessão, ou assim concebidos, e a mesma diferença quantitativa é encontrada entre os números sucessivos, mas não a mesma razão entre os termos, um para o outro" (II, 23.1). Na série de números naturais inteiros 1, 2, 3, 4, 5..., os termos estão em proporção aritmética, pois "suas diferenças comparadas com aqueles [termos] colocados em cada lado dele são iguais" (II, 23.1).

Nicômaco enumera cinco propriedades dessa espécie de proporção: (i) Tomados de uma proporção aritmética três ou quatro ou mais termos *adjacentes* (i.e., sem termos omitidos), forma-se outra proporção aritmética em que a diferença entre os termos será igual a 1; tomados de uma proporção aritmética três ou quatro ou mais termos *separados* segundo um intervalo constante (i.e., mesma quantidade de termos omitidos), forma-se outra proporção aritmética em que a diferença entre os termos será igual a 2 ou mais. Em outras palavras, dado o intervalo *i*, a diferença será *i* + 1. Assim, se não há intervalos (p.ex., 3, 2, 1), a diferença entre os termos será igual a 1; se o intervalo é de um termo (p.ex., 5, 3, 1), a diferença entre os termos será igual a 2; se o intervalo é de dois termos (p.ex., 7, 4, 1), a diferença será igual a 3 etc.; (ii) "O meio termo é a metade da, e igual à, soma dos extremos" (II, 23.5), ressaltando-se que, para ser igual à soma dos extremos, deve-se considerar "o meio termo consigo mesmo, ou os meios termos um com o outro". Isso significa: sendo a, b, c termos tais que a : b = b : c é uma proporção aritmética, então 2b = a + c e $b = \frac{a+c}{2}$; pela mesma razão, sendo a, b, c, d termos tais que a : b = b : c = c : d é uma proporção aritmética, então b + c = a + d, $b = \frac{a+c}{2}$ e $c = \frac{b+d}{2}$; (iii) A razão que cada termo tem consigo mesmo é igual à razão existente entre as diferenças entre os termos (II, 23.6): $\frac{a}{a} = \frac{b}{b} = \frac{c}{c} = \frac{b-a}{c-b}$, para a forma contínua, e $\frac{a}{a} = \frac{b}{b} = \frac{c}{c} = \frac{d}{d} = \frac{b-a}{c-b} = \frac{c-b}{d-c}$, para a forma disjunta, lembrando-se que a > b > c e a > b > c > d; (iv) "O produto dos extremos, comparado ao quadrado do médio, é menor do que ele pelo produto das diferenças" (II, 23.6): ac = b² -

(b – a) (c – b) ou, conforme Heath[33], b² - ac = (a – b)² (já que as diferenças são iguais); (v) As razões entre os termos menores são maiores do que as razões entre os termos maiores (II, 23.6): $\frac{a}{b} < \frac{b}{c}$ para a forma contínua, $\frac{a}{b} < \frac{b}{c} < \frac{c}{d}$ para a forma disjunta.

Justifica-se a definição de proporção aritmética sobretudo pelas propriedades (i) e (v) *supra*: as razões (ou qualidades) entre os termos (maiores e menores) da proporção aritmética são diferentes entre si (v), embora as diferenças entre os termos sejam sempre quantitativamente iguais (i). Na proporção geométrica, as razões (ou qualidades) entre os termos (maiores e menores) são iguais e as diferenças entre os termos, quantitativamente desiguais.

Na sequência, Nicômaco passa a tratar da proporção geométrica. Ela é, segundo diz, "a única [proporção] no sentido estrito da palavra", porque "seus termos estão na mesma razão" (II, 24.1)[34]. Se a, b, c são termos tal que a : b = b : c é uma proporção geométrica (contínua), então a, b, c se diferem entre si, não pela mesma quantidade, mas pela mesma "qualidade de razão" (II, 24.1). Considere-se a série de números naturais inteiros segundo a "razão dupla": 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64... (II, 24.2): quaisquer três ou mais termos nessa série estão em proporção geométrica, diferenciando-se não pela mesma quantidade (a diferença em 1 : 2 é 1, em 2 : 4 é 2, em 4 : 8 é 4 etc.), mas pela mesma qualidade ou pela mesma razão (o dobro), sendo que todos os termos preservam essa mesma razão. Assim, seja a definição dessa proporção a seguinte: a, b, c sendo termos em proporção geométrica contínua e a > b > c, então $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ ou, o que dá no mesmo, $\frac{c}{b} = \frac{b}{a}$; semelhantemente, sendo a, b, c, d em proporção geométrica disjunta e a > b > c > d, então $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, ou, o que dá no mesmo, $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$, $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ e $\frac{d}{c} = \frac{b}{a}$ (II, 24.2).

Nicômaco destaca três propriedades dessa proporção: (i) A razão entre as diferenças dos termos um para com o outro e os termos adjacentes a eles, do maior ao menor e vice-versa, é a mesma (II, 24.3): para a, b, c em proporção geométrica e a > b > c, $\frac{c-b}{b-a} = \frac{c}{b} = \frac{b}{a}$; (ii) A diferença entre um termo maior (a) e um termo menor (b) é dada pelo termo menor (b) em proporção com a razão (chamemos r), tal que a menor razão possível corresponde a b (se r = 2 então b), a razão tripla corresponde ao dobro de b (se r = 3 então 2b), a quádrupla ao triplo (se r = 4 então 3b) e assim sucessivamente; portanto, se r então (r – 1)b. Assim, a, b, c sendo termos em uma progressão geométrica e a > b > c, tem-se que (a – b) = b (r – 1) e (b – c) = c (r – 1); (iii) Na proporção geométrica

[33] HEATH, 1981, p. 110.

[34] Lembre-se que em *Intr. Arit.*, II, 21.2 a proporção fora definida como "a combinação de duas ou mais razões".

contínua, “o produto dos extremos é igual ao quadrado do meio” (II, 24.4), isto é, $ac = b^2$, mas na proporção geométrica disjunta “o produto dos extremos equivale ao produto dos meios” (II, 24.4), ou seja, $ad = bc$.

Diz Nicômaco, em conclusão, que, aplicando essas três propriedades, “sempre que modelarmos, começando com a igualdade, todos os tipos de desigualdade um a partir do outro” (II, 24.5), o que resulta é uma proporção geométrica em que a mesma razão está preservada.

A terceira e última proporção a ser tratada é a harmônica (II, 25.1 ss.). Nesta, não há nem identidade de qualidade ou razão (como na proporção geométrica) nem identidade de diferenças (como na proporção aritmética). Ela é definida da seguinte maneira: “Como o termo maior está para o menor, assim a diferença entre os termos maior e médio está para a diferença entre os termos médio e menor” (II, 25.1; II, 25.5). Ou seja, a, b, c estando em proporção harmônica e $a > b > c$, então $\frac{a}{c} = \frac{a-b}{b-c}$. As duas proporções harmônicas mais simples são 3, 4, 6 e 2, 3, 6.

Nicômaco descreve três propriedades da proporção harmônica: (i) As razões são maiores entre os termos maiores e menores entre os termos menores: $\frac{a}{b} > \frac{b}{c}$ (II, 25.2). Nicômaco observa que isso é o inverso do que ocorre na proporção aritmética (II, 23.6), onde as razões são maiores entre os termos menores e menores entre os termos maiores; observa, também, que na proporção geométrica, por definição, as razões são iguais, de modo que situa a geométrica como um meio termo entre a aritmética e a harmônica (II, 23.6)[35]; (ii) “O termo médio é maior e menor do que os termos em cada lado por frações diferentes de si mesmo, mas sempre pela mesma fração dos termos ao seu lado, a metade ou a terça parte deles” (II, 25.3). Por exemplo, sendo 6, 3, 2 valores atribuídos a a, b, c respectivamente, $a > b > c$, temos as diferenças $a - b = 3$ e $b - c = 1$. Essas diferenças (3 e 1) constituem frações diferentes de b ($\frac{3}{3}$, $\frac{1}{3}$), mas a mesma fração de a, c, isto é, a metade ($\frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$). *En passant*, o mesmo aplicado a 3, 4, 6 a diferença resultante corresponde à terça parte de a, c. Generalizando, se o termo maior supera o médio ($a - b$) por uma fração do maior (a no denominador), e o termo médio supera o menor ($b - c$) por uma fração do menor (c no denominador), e as frações resultantes têm de ser iguais, então $\frac{a-b}{a} = \frac{b-c}{c}$. Nicômaco observa que também nessa propriedade a proporção harmônica é o oposto da aritmética, pois “na proporção aritmética o termo médio é maior e menor do que aqueles em cada lado pela mesma fração de si mesmo, mas por diferentes frações dos termos que o flanqueiam (II, 25.3): em

[35] Considerando três séries de termos em proporção aritmética, geométrica e harmônica respectivamente: 3, 2, 1 ($\frac{3}{2} < \frac{2}{1}$); 4, 2, 1, ($\frac{4}{2} = \frac{2}{1}$); 6, 4, 3 ($\frac{6}{4} > \frac{4}{3}$).

3, 2, 1 as diferenças a – b e b – c resultam respectivamente na mesma fração de b, isto é, a metade (1), mas em frações diferentes de a, c ($\frac{1}{3}$, $\frac{1}{1}$). Nicômaco observa, ainda sobre essa mesma propriedade, que “a proporção geométrica [...] apresenta essa propriedade nem no meio termo exclusivamente nem nos extremos, mas tanto no meio quando nos extremos” (II, 25.3): em 4, 2, 1 as diferenças a – b e b – c resultam respectivamente em frações diferentes de b ($\frac{2}{2}$, $\frac{1}{2}$) e em frações diferentes de a, c ($\frac{4}{2}$, $\frac{1}{1}$); (iii) “Quando os extremos são adicionados um ao outro e multiplicados pelo médio, disso resulta duas vezes o produto deles mesmos multiplicados um pelo outro” (II, 25.4), ou seja: (a + c) b = 2ac.

Sobre a origem do nome, “harmônica” (que prevaleceu sobre o anterior, “subcontrária”), Nicômaco apresenta três possibilidades. (i) Foi dito que a proporção harmônica não apresenta, exclusivamente, nem identidade de razão (característica da proporção geométrica) nem identidade de diferença (próprio da proporção aritmética), mas, de certa forma, ambas estão presentes. Se a proporção aritmética apresenta diferença na quantidade e identidade nos intervalos entre os termos, e inversamente a proporção geométrica apresenta identidade na qualidade (ou na razão), isto é, nas relações qualitativas entre um termo e outro (II, 25.5), a proporção harmônica, por seu turno, “aparece ora em uma forma, ora em outra, nem exclusivamente em seus termos nem exclusivamente em suas diferenças, mas parcialmente nos termos e parcialmente nas diferenças” (II, 25.5). De fato, $\frac{a}{c} = \frac{a-b}{b-c}$ apresenta relação qualitativa (entre o termo maior e o menor) e relação entre os intervalos (diferenças entre os termos maior e médio, médio e menor). A circunstância de a proporção harmônica reunir em si duas características diferentes das duas outras proporções pode ser a razão de seu nome, já que “harmonia”, desde Homero e também para os pitagóricos antigos, era “aquilo que une as diferentes partes de um todo”[36]. (ii) A segunda possibilidade está ligada às consonâncias musicais. “As razões musicais dos intervalos harmônicos também se encontram nessa proporção [a harmônica]” (II, 26.1). Passa à prova, relacionando os cinco principais intervalos musicais às duas proporções harmônicas mais simples (*supra*). Assim, dados três termos a, b, c com a > b > c, seja-lhes atribuídos os valores 6, 4, 3 na segunda coluna e 6, 3, 2 na terceira coluna (II, 26.1):

Intervalo musical	Equivalente na proporção harmônica 6-4-3	Equivalente na proporção harmônica 6-3-2
4 : 3	b : c	(a – c) : (a – b)

[36] OCHOA, 1994, p. 10.

6 : 4 ou 3 : 2	a : b	b : c
6 : 3 ou 2 : 1	a : c	a : b
6 : 2 ou 3 : 1	a : (a – b) (a – c) : (b – c)	a : c (a – b) : (b – c)
4 : 1	b : (b – c)	(a – c) : (b – c)

(iii) A terceira possibilidade é devida, segundo Nicômaco, a Filolau. A proporção se chama harmônica porque "participa de toda a harmonia geométrica" (II, 26.2). Para Filolau, sempre segundo Nicômaco, a harmonia geométrica é representada pelo cubo, porque (i) o cubo "está harmonizado em todas as três dimensões, sendo o produto de um número multiplicado três vezes [x^3]"; (ii) existe em todo cubo 12 lados, 8 ângulos e 6 faces, sendo que 6, 8, 12 está em proporção harmônica; (iii) 6, 8, 12 apresenta todos os intervalos musicais mencionados: o intervalo 4 : 3 está na razão 8 : 6; o 3 : 2 na 12 : 8; o 2 : 1 na 12 : 6; o 3 : 1 "na razão da diferença dos extremos com a diferença dos termos menores" ($\frac{3}{1} = \frac{12-6}{8-6}$) (II, 26.2); e o 4 : 1 "é a razão do meio termo com a diferença entre ele mesmo e o termo menor" ($\frac{4}{1} = \frac{8}{8-6}$) (II, 26.2).

Tendo já descrito todas as três proporções celebradas pelos antigos, e ainda sem deixar o assunto da teoria musical, Nicômaco observa uma semelhança entre as escalas musicais e as proporções (II, 27.1):

Assim como, na divisão do cânone musical, quando uma única corda é esticada ou um comprimento de tubo é usado, com extremidades imóveis, e o ponto médio se desloca no tubo mediante buracos para os dedos, na corda mediante o rastilho [...] da mesma forma é razoável e possível inserir o termo médio adequado a cada uma das três proporções entre dois termos aritméticos, que permanecem fixos e não mudam, sejam eles ambos pares ou ímpares.

Parece certo que Nicômaco está se referindo a um tetracorde, o elemento primário da música grega. Um tetracorde corresponde a um intervalo de quarta. Nesse intervalo tomam parte quatro sons, tais que os dois sons extremos, os que limitam o tetracorde, são chamados "sons fixos", porque se lhes determina uma altura constante, e os dois intermediários recebem o nome de "sons móveis", porque sua altura pode ser variada dentro dos três gêneros de progressão melódica (diatônico, cromático e enarmônico)[37]. Assim, por exemplo, sendo E e A sons fixos que limitam um tetracorde e deslocando-se os sons intermediários, tem-se E, F, G, A (diatônico), E, F #F, A (cromático) e E, +E, F, A (enarmônico)[38]. Nicômaco entende que o mesmo se passa nas proporções. Por exemplo, sejam 10 e 40 os valores relativos a respectivamente

[37] REINACH, 2011, p. 36-37, 41-42.
[38] REINACH, 2011, p. 54. O modo utilizado no exemplo é o dório.

a, c. Se b = 25, tem-se uma proporção aritmética; se b = 20, uma geométrica; se b = 16, uma harmônica (II, 27.2-6).

3. “Um certo teorema de Platão”

Nicômaco apresenta o que chama de “um certo teorema de Platão” (εἰς Πλατωνικόν τι θεώρημα) logo após tratar das propriedades da proporção geométrica. Ele o enuncia assim: “Números quadrados são unidos sempre por uma única média, sólidos por duas, na forma de uma proporção” (II, 24.6).

Nicômaco conhecia a prova de Euclides, apresentada no Livro VIII dos *Elementos*, que consiste esquematicamente no seguinte[39]:

Elementos VIII, 18	*Elementos* VIII, 19
Seja A, B = números quadrados C = lado de A, logo C x C = A D = lado de B, logo D x D = B C x D = E. (i) Se C x C = A e C x D = E, então $\frac{C}{D} = \frac{A}{E}$. (ii) Se D x C = E e D x D = B, então $\frac{C}{D} = \frac{E}{B}$. Logo, $\frac{A}{E} = \frac{E}{B}$ (i e ii).	Seja A, B = números cubos C = lado de A D = lado de B C x C = E, logo C x E = A C x D = F D x D = G logo D x G = B C x F = H D x F = K. (i) Se C x C = E e C x D = F, então $\frac{C}{D} = \frac{E}{F}$. (ii) Se D x C = F e D x D = G, então $\frac{C}{D} = \frac{F}{G}$. (iii) Se C x E = A C x F = H, então $\frac{E}{F} = \frac{A}{H}$. (iv) Mas $\frac{E}{F} = \frac{C}{D}$ (i). Então, $\frac{C}{D} = \frac{A}{H}$. (v) Se C x F = H D x F = K, então $\frac{C}{D} = \frac{H}{K}$. (vi) Se D x F = K D x G = B,

[39] *Elem.*, VIII, 18 e 19. A prova depende das demonstrações em *Elem.*, VII, 17 e 18. *Elem.*, VII, 17 estabelece: “Se um número, ao multiplicar dois números, produz certos números, os números assim produzidos terão a mesma razão que os números multiplicados”. Ou seja: se A x B = C e A x D = E, então $\frac{B}{D} = \frac{C}{E}$. *Elem.*, VII, 18 estabelece: “Se dois números, ao multiplicar qualquer número, produz certos números, os números assim produzidos terão a mesma razão que os multiplicadores”. Seja A x B = C e D x B = E, então $\frac{A}{D} = \frac{C}{E}$.

	então $\frac{F}{G} = \frac{K}{B}$. (vii) Mas $\frac{F}{G} = \frac{C}{D}$ (ii). Então, $\frac{C}{D} = \frac{K}{B}$. Logo, $\frac{C}{D} = \frac{A}{H} = \frac{H}{K} = \frac{K}{B}$ (iv, v, vii).

Em outras palavras, a média geométrica entre os quadrados A, B é o produto dos respectivos lados C, D indicado por E, isto é, A : E = E : B. Em outra notação possível, temos $a^2 : ab = ab : b^2$, sendo a^2, b^2 quadrados de lados a, b. As médias geométricas entre os cubos A, B serão o produto de dois lados do primeiro cubo com um do segundo (C x C x D), indicado por H, e o produto de um lado do primeiro cubo com dois do segundo (C x D x D), indicado por K, isto é, A : H = H : K = K : B. Em outra notação possível, temos $a^3 : a^2b = a^2b : ab^2 = ab^2 : b^3$, sendo a^3, b^3 cubos de lados a, b.

Embora Nicômaco aparentemente não tenha adotado a teoria da proporção de Euclides-Eudoxo exposta no Livro V dos *Elementos*, como se disse, a sua demonstração da proporção entre quadrados e cubos é substancialmente a mesma da oferecida por Euclides no Livro VIII, embora consideravelmente mais simples.

Nicômaco diz que entre dois consecutivos números quadrados “apenas um [εἷς μόνος] termo médio é descoberto que preserva a proporção geométrica [...] e nunca mais do que um [οὐδέποτε δὲ πλείονες]” (II, 24.6). Lembre-se, conforme *supra*, que um número quadrado é expresso por x^2. Nicômaco dá como exemplos de números quadrados o 1 (= 1^2), o 4 (= 2^2) e o 9 (= 3^2) (II, 24.8). Portanto, 1, 4, 9, 16, 25... forma a série dos números quadrados consecutivos. A média geométrica (E) se obtém multiplicando-se o lado de um quadrado com o lado do quadrado seguinte (C x D). Representando-se os números 4 e 9, por exemplo, como dois quadrados de lados C e D respectivamente,

C $\times$ D = 6, que, entre 4 e 9, forma uma proporção geométrica contínua com razão igual a $\frac{2}{3}$. Nas palavras de Nicômaco: “Os lados dos dois quadrados [...] juntos produzem esse mesmo número 6” (II, 24.9).

Já entre dois consecutivos números cubos, “apenas dois [δύο μόνοι] termos médios em razão apropriada são descobertos, de acordo com a proporção geométrica, nunca mais [πλείονες δὲ οὐδέποτε]” (II, 24.7). Lembre-se, conforme *supra*, que um número cubo é expresso por x^3. Os exemplos de Nicômaco são 8 (= 2^3) e 27 (= 3^3) (II, 24.9). Assim, 8, 27, 64, 125... é a série dos números cubos consecutivos. A média geométrica se obtém, assim como no caso precedente, multiplicando-se os lados. Dados os cubos A, B de valores 8 e 27, e de lados C, D iguais a 2 e 3 respectivamente, faz-se "2 vezes 2 vezes 3 [C x C x D] e 3 vezes 3 vezes 2 [C x D x D]" (II, 24.9) para obter 12 e 18, que, entre 8 e 27, formam uma proporção geométrica disjunta com razão igual a $\frac{2}{3}$.

A prova de Nicômaco parece bem adequada, considerando-se as duas primeiras progressões geométricas, isto é, "os números a partir de 1 que avançam segundo a razão dupla, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 e assim em diante, ou segundo a razão tripla, 1, 3, 9, 27, 81, 243" (II, 24.2). Pode-se ver, nas duas séries, que entre dois números quadrados há somente um termo médio e entre dois cubos, dois[40]:

1	2	4 (2^2)	8 (2^3)	16 (4^2)	32	64 (8^2 ou 4^3)	128	256 (16^2)	512 (8^3)
1	3	9 (3^2)	27 (3^3)	81 (9^2)	243	729 (27^2 ou 9^3)	2.187	6.561 (81^2)	19.683 (27^3)

Apesar de sua aparente suficiência, a prova de Nicômaco apresenta limitações. Para Nicômaco, como visto, entre dois quadrados existe "apenas um termo médio" e "nunca mais que um"; da mesma forma, entre dois cubos existem "apenas dois". Mas esse não é sempre o caso. Como mostrou Proclo em seu comentário ao *Timeu*, quadrados podem apresentar mais de um termo médio entre si, e cubos, apenas um só.

Quadrados podem apresentar mais de um termo médio se seus próprios lados admitirem um termo médio proporcional entre si. Quanto aos quadrados cujos lados não admitem um termo médio, Proclo apresenta o exemplo dos números 9 e 16, quadrados de lado 3 e 4 respectivamente, que não admitem um termo médio proporcional e que, multiplicados entre si, formam 12, produzindo a proporção geométrica 9, 12, 16 (razão igual a $\frac{3}{4}$). O mesmo não acontece entre, por exemplo, 16 e 81, quadrados de lado 4 e 9. Os números 4 e 9 admitem um termo médio proporcional, o número 6, ele mesmo lado do quadrado 36, formando a proporção 4, 6, 9 de razão igual a $\frac{2}{3}$. As médias serão obtidas, como sempre, pelo produto dos lados dos quadrados, considerando agora, porém, o quadrado formado pelo termo médio dos lados dos quadrados iniciais: 4×6, 6×6, 6×9, chegando-se, assim, às três médias geométricas entre 16 e 81, formando a proporção 16, 24, 36, 54, 81 (razão igual a $\frac{3}{2}$).

40 CORNFORD, 1981, p. 49-50.

“Portanto”, conclui Proclo, “existe mais do que um termo médio quando os lados [dos quadrados] têm uma média geométrica”[41].

Cubos podem apresentar apenas um termo médio entre si se apresentarem a propriedade de serem cubos e quadrados ao mesmo tempo. Por exemplo, para harmonizar entre si os cubos 64 (= 4^3) e 729 (= 9^3), basta um termo médio, 216, pois $\frac{64}{216} = \frac{216}{729}$ (razão igual a $\frac{8}{27}$). Mas isso se dá porque os extremos, além de cubos, são também quadrados: 64 = 8^2 e 729 = 27^2, sendo que C x D = E $\rightarrow 8 \times 27 = 216$. Portanto, sempre que os cubos em questão possuírem “essa característica definidora de números quadrados”, bastará um único termo médio entre eles. Mas, se forem considerados como cubos, serão encontrados dois termos médios, C x C x D = H $\rightarrow 4 \times 4 \times 9 = 144$ e C x D x D = K $\rightarrow 9 \times 9 \times 4 = 324$, concluindo-se, enfim, que $\frac{64}{144} = \frac{144}{324} = \frac{324}{729}$ (razão igual a $\frac{4}{9}$).

Em outras palavras, a limitação da prova de Nicômaco consiste em postular, categoricamente, que entre dois quadrados existe “apenas um” termo médio “e nunca mais que um”, e que entre dois cubos existem “apenas” dois termos médios, quando, como se viu, essas proposições são relativas: aos lados dos quadrados não admitirem um termo médio proporcional entre si, em um caso; aos cubos não terem a propriedade de serem simultaneamente quadrados, no outro.

Para Proclo, Platão não teria cometido esse equívoco; ao propor, no *Timeu*, que entre dois quadrados existe um termo médio e que entre dois cubos existem dois, ele não o teria feito categoricamente, mas teria querido dizer que “é possível que” um termo médio seja suficiente para harmonizar dois quadrados e dois termos, para harmonizar dois cubos. Dessa forma, abrange-se também a possibilidade de mais de um termo harmonizar dois quadrados e um apenas, dois cubos.

4. Filosofia, matemática e exercício da morte

Pode parecer estranho à primeira vista que Platão, no *Timeu* como em outros diálogos, responda filosofia (a cosmologia das raízes de Empédocles) com matemática (a teoria das proporções entre quadrados e cubos), sem solução de continuidade. Ele pode fazer isso talvez porque participe de uma tradição, que remonta a Tales de Mileto, em que matemática e filosofia se desenvolvem juntas, e não só contemporaneamente[42]. Ou talvez porque ele

[41] *Com. Tim.*, III, 31.10-15.

[42] CATTANEI, 2005, p. 22. Isso não quer dizer que Platão aspire a uma “matematização” da filosofia, mas o contrário: uma “ontologização” da matemática (HÖSLE, 2008, p. 165), no sentido de que o fundamento da matemática é buscado nas doutrinas das Ideias (escrita) e dos primeiros princípios (não escrita). Nas palavras de Reale: “Platão não matematizou a metafísica, mas, ao contrário, fundou metafisicamente e, por conseguinte, utilizou

tenha descoberto, na matemática, uma contribuição para a condução argumentativa do diálogo[43]. Mas existe uma terceira possibilidade: em certo sentido, filosofia e matemática, no platonismo, participam da mesma experiência[44], que o próprio Platão chamou de "exercício da morte" (μελέτη θανάτου)[45].

Morte, no platonismo, é sinônimo de libertação da alma do corpo[46]. Não no sentido órfico, marcado pela irracionalidade do rito; não ainda, também, no

---

metafisicamente, *em chave analógica, a matemática*" (REALE, 2014, p. 99, destaques no original). No que diz respeito ao Timeu, isso está razoavelmente claro desde o início: o deus cria ordem na matéria através do número, mas o modelo dessa ordem numérica não é o próprio número, e sim a Ideia.

[43]Segundo Brisson e Pradeau, Platão encontrou nas matemáticas "um modelo ao raciocínio e à argumentação filosóficos" (BRISSON, PRADEAU, 1998, p. 30). Os autores apontam o *Mênon* como o momento em que Platão abandonou o método que vinha usando até então – a refutação (ἔλεγχος) sócrática, que "se tratava de, no curso de uma discussão, fazer o interlocutor admitir uma proposição que contradissesse uma proposição inicial" (BRISSON, PRADEAU, 1998, p. 32), e que apresentava limitações tais como a sua aplicação restrita a conceitos e valores morais (coragem, piedade, justiça etc.) e seu alcance estritamente negativo – para adotar "uma orientação construtiva, inspirando-se precisamente no método matemático", o qual os autores descrevem da seguinte forma: "A partir de proposições tidas de partida por verdadeiras, e que podem ser qualificadas de 'axiomas', de 'postulados' e de 'princípios', deduz-se um certo número de outras proposições verdadeiras, que podem ser chamadas 'teoremas', aplicando um conjunto de regras bem definidas e conhecidas de todos". Em suma, Platão teria descoberto nas matemáticas um recurso argumentativo novo, de interesse para a filosofia. Nesse mesmo sentido escreve Christoph Kann: "Com recursos a exemplos, analogias e excursos matemáticos, Platão intenciona, nos diálogos intermediários e tardios, oferecer para a condução argmentativa do diálogo uma contribuição construtiva que aponte além do saber matemático especializado no sentido próprio". (KANN, 2007, p. 213).

[44] Contra certa maneira de abordar a filosofia, que tende a se limitar à obra escrita de um autor (veja-se, p.ex., GOLDSCHMIDT, 2014, p. XXVII: "Um pensamento filosófico se exprime em obras escritas"), Pierre Hadot enfatiza o caráter "experiencial" mais fundamental da filosofia, e em particular da filosofia antiga: "A filosofia é uma experiência que transcende toda expressão" (HADOT, 2002, p. 16). Para transmitir a ideia de filosofia como uma experiência, que pode ou não envolver o discurso, Hadot introduziu o conceito de "exercício espiritual": "Eu designo por esse termo práticas, que podem ser de ordem física, como o regime alimentar, ou discursiva, como o diálogo e a meditação, ou intuitiva, como a contemplação, mas que são todas destinadas a operar uma modificação e uma transformação no sujeito que as pratica" (HADOT, 1995, p. 21-22). Especificamente sobre os exercícios espirituais típicos da tradição platônica, Hadot observa: "A prática mais célebre é o exercício da morte" (HADOT, 1995, p. 109). No platonismo pagão, o exercício da morte aparece principalmente (mas talvez não exclusivamente) como prática discursiva: as ciências matemáticas e a dialética. No platonismo cristão, parece haver uma tendência, provavelmente devida ao influxo de vocabulário bíblico (Rm 8,13 e Cl 3,5 p.ex.), a confundir exercício da morte com mortificação (veja-se, p.ex., a citação de Evágrio do Ponto em HADOT, 1995, p. 370); e então o exercício da morte aparece como prática física.

[45] *Féd.*, 80e.

[46] *Féd.*, 67c-d. "'Mas uma purificação [κάθαρσις] não é por acaso justamente [...] separar [χωρίζειν] o melhor possível a alma do corpo [...] libertando [ἐκλυομένην, sc. a alma] do corpo como se se liberta de suas correntes?' 'Perfeitamente', ele [Símias] disse. 'Então, o que precisamente se chama morte é uma libertação e uma separação da alma em relação ao corpo [λύσις καὶ χωρισμὸς ψυχῆς ἀπὸ σώματος]?' 'Sim, absolutamente', ele disse".

sentido pitagórico, limitado à racionalidade matemática[47]. Morte, em sentido platônico, é libertação da alma do sensível pela razão matemática, sim, mas sobretudo pela razão filosófica. A matemática e a filosofia libertam a alma do corpo porque desviam os "olhos da alma" do visível onde ela está cativa para o inteligível[48]. Mas a libertação promovida pela matemática é limitada.

Ao final do Livro VI da *República*[49], Sócrates distingue duas formas de racionalidade. De um lado está a razão matemática (διάνοια). No Livro VII vemos sua aplicação nas cinco espécies de ciências matemáticas, aritmética, geometria, estereometria, astronomia e harmonia. Esses estudos, como observa Heath, "nada têm a ver com os objetos da sensação", concernindo somente "a realidades independentes da percepção sensível", excluídos "sensação, observação e experimento"[50]. Nesse sentido, esses estudos promovem a libertação da alma. Contudo, estão condicionados a hipóteses tais como "o par e o ímpar, as figuras, três espécies de ângulos" etc.[51], as quais são tomadas como garantidas independentemente de argumento; além disso, muitas vezes não dispensam, para atingir aquelas realidades independentes da percepção, "que não se veem de outra forma exceto pelo pensamento", o uso de figuras sensíveis como apoio, "pensando, não nestas figuras mesmas, porém nos originais que reproduzem", isto é, por exemplo, na diagonal em si e não na diagonal traçada etc. Por isso, a libertação promovida por esses estudos é limitada. Mas de outro lado está a razão filosófica (νοῦς) e sua aplicação, a ciência da dialética, que o Livro VII descreve como a "cúpula das ciências"[52], capaz de atingir o absoluto (ἀνυπόθετος, lit. "não-hipotético") e o princípio de tudo (παντὸς ἀρχήν)[53], nem se limitando a hipóteses nem se apoiando sobre figuras sensíveis. Aqui, a libertação da alma é absoluta.

Como Hösle observa[54], a διάνοια, embora ainda limitada, é a primeira experiência da alma com o inteligível; daí porque é "pré-requisito" do νοῦς, o que tem correspondência em diversas passagens da *República* e alhures, como por exemplo quando Sócrates afirma que a verdade é revelada somente pelo poder da dialética apenas aos experientes nos estudos matemáticos[55].

---

47 Sobre um breve resumo a respeito da purificação e libertação da alma no orfismo e no pitagorismo, ver REALE, 2012, p. 190.

48 *Rep.*, VII 525b-533e.

49 *Rep.*, VII 511a-e.

50 HEATH, 1981b, p. 245-246.

51 *Rep.*, VI 510c.

52 *Rep.*, VII 534e.

53 *Rep.*, VI 511b.

54 "Para Platão, a διάνοια matemática, na medida em que ultrapassa a experiência sensorial, é condição genética e pré-requisito irrenunciável para o νοῦς filosófico; de fato, o pathos platônico pela razão quase não se deixa compreender psicologicamente sem a experiência da verdade que a matemática significou manifestamente para ele" (HÖSLE, 2008, p. 164).

55 *Rep.*, VII 533a.

Assim, a identidade da experiência – a morte, ou a libertação da alma do corpo para a contemplação do inteligível – garante a transição, no *Timeu* e em outros diálogos, da filosofia à matemática e vice-versa.

Bibliografia

ARISTÓTELES. *Metafísica*. São Paulo: Edições Loyola, 2002.

BICUDO, Irineu. "Introdução", in EUCLIDES. *Os elementos*. São Paulo: Editora UNESP, 2019.

BOYER, Carl, MERZBACH, Uta. *História da matemática*. São Paulo: Blucher, 2012.

BRISSON, Luc, PRADEAU, Jean-François. *Le vocabulaire de Platon*. Paris: Ellipses, 1998.

BURNET, John. *A aurora da filosofia grega*. Rio de Janeiro: Contraponto/Editora PUC Rio, 2006.

CATTANEI, Elisabetta. *Entes matemáticos e metafísica: Platão, a Academia e Aristóteles em confronto*. São Paulo: Edições Loyola, 2005.

CORNFORD, Francis. *Plato's Cosmology: the Timaeus of Plato translated with a running commentary*. New York: Harcourt, Brace and Company, 2014.

DIELS, Hermann. *Elementum: eine Vorarbeit zum griechischen und lateinischen Thesaurus*. Leipzig: Druck und Verlag von B.G. Teubner, 1899.

EMPÉDOCLES. "Fragmentos", in BURNET, John. *A aurora da filosofia grega*. Rio de Janeiro: Contraponto/Editora PUC Rio, 2006.

EUCLIDES. *The thirteen books of the Elements*. Vol. 2 (Books III-IX). New York: Dover Publications, 1956.

GOLDSCHMIDT, Victor. *Os diálogos de Platão: estrutura e método dialético*. São Paulo: Edições Loyola, 2014.

HADOT, Pierre. *Exercices spirituels et philosophie antique*. Paris: Éditions Albin Michel, 2002.

HADOT, Pierre. *Qu'est-ce que la philosophie ancienne?*. Paris: Éditions Gallimard, 1995.

HEATH, Thomas. *A history of greek mathematics*. Vol. 1 (From Thales to Euclid). New York: Dover Publications, 1981.

HEATH, Thomas. *Aristarchus of Samos: the ancient Copernicus*. New York: Dover Publications, 1981b.

HEATH, Thomas. *The thirteen books of the Elements*. Vol. 2 (Books III-IX). New York: Dover Publications, 1956.

HÖSLE, Vittorio. *Interpretar Platão*. São Paulo: Edições Loyola, 2008.

KANN, Christoph. “Matemática” (verbete), in SCHÄFER, Christian (Org.). *Léxico de Platão*. São Paulo: Edições Loyola, 2007.

NICÔMACO DE GERASA. *Introduction to Arithmetics*. Chicago: William Benton Publisher, 1952.

OCHOA, César González. *La Música del Universo. Apuntes sobre la Noción de Armonía en Platón*. México: UNAM, 1994.

PLATÃO. *Oeuvres Complètes*. Paris: Flammarion, 2011.

PROCLO. *Commentary on Plato's Timaeus*. Vol. 3 (Book 3 Part 1, Proclus on the World's Body). Cambridge: Cambridge University Press, 2007.

PROCLO. *Commento al I libro degli Elementi di Euclide*. Pisa: Giardini Editori, 1978.

REALE, Giovanni. *História da filosofia grega e romana*. Vol. 1 (Pré-socráticos e orfismo). São Paulo: Edições Loyola, 2012.

REALE, Giovanni. *História da filosofia grega e romana*. Vol. 3 (Platão). São Paulo: Edições Loyola, 2014.

REINACH, Théodore. *A música grega*. São Paulo: Editora Perspectiva, 2011.

THOMAS, Ivor. *Greek mathematical works*. Vol. 1 (From Thales to Euclid). London: Harvard University Press, 1957.

Recebido para publicação em 23-01-22; aceito em 03-02-22